Corrigé de l'exercice 2 feuille 4 : symétries et rotations vectorielles.

a) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et D_θ la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(\cos\theta, \sin\theta)$ $\quad (D_\theta = \{(\lambda\cos\theta, \lambda\sin\theta), \lambda \in \mathbb{R}\})$

On va déterminer la matrice (ds la base canonique) de la symétrie orthogonale par rapport à D_θ.

Notons $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ vecteur directeur de D_θ, alors $\vec{v} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ est un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x = (x|u)u + (x|v)v$. En effet (u,v) est une BON de $\mathbb{R}^2$ donc x s'écrit $\lambda u + \mu v$ pour un unique couple (λ, μ) de réels. En calculant $(x|u) = \lambda(u|u) + \mu(v|u)$ et $(x|v) = \lambda(u|v) + \mu(v|v)$ et en utilisant $(u|u) = 1 = (v|v)$ et $(u|v) = 0$ on obtient $\lambda = (x|u)$ et $\mu = (x|v)$

$(x|u)u$ est donc la projection orthogonale de x sur D_θ et $(x|v)v$ est la projection orthogonale de x sur $D_\theta^\perp$

Par définition de s_{D_θ} on a $s_{D_\theta}(x) = p_{D_\theta}(x) - p_{D_\theta^\perp}(x) = (x|u)u - (x|v)v$

$$s_{D_\theta}(1,0) = ((1,0)|(\cos\theta,\sin\theta))\,(\cos\theta,\sin\theta) - ((1,0)|(-\sin\theta,\cos\theta))\,(-\sin\theta,\cos\theta)$$
$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$$
$$s_{D_\theta}(0,1) = ((0,1)|(\cos\theta,\sin\theta))\,(\cos\theta,\sin\theta) - ((0,1)|(-\sin\theta,\cos\theta))\,(-\sin\theta,\cos\theta)$$
$$= (2\cos\theta\sin\theta,\ \sin^2\theta - \cos^2\theta) = (\sin 2\theta, -\cos 2\theta)$$

D'où la matrice de s_{D_θ} ds la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

b) La composée $s_{D_\theta} \circ s_{D_{\theta'}}$ a pour matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\theta' & \sin 2\theta' \\ \sin 2\theta' & -\cos 2\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta\cos 2\theta' + \sin 2\theta \sin 2\theta' & \sim \\ \sin 2\theta\cos 2\theta' - \cos 2\theta\sin 2\theta' & \sim \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(2\theta - 2\theta') & -\sin(2\theta - 2\theta') \\ \sin(2\theta - 2\theta') & \cos(2\theta - 2\theta') \end{pmatrix}$$

On reconnait la matrice de la rotation vectorielle d'angle $2(\theta - \theta')$ (relativ' à la base canonique de $\mathbb{R}^2$)

On a $s_{D_{\theta_1}} \circ s_{D_{\theta_2}} = s_{D_{\theta'_1}} \circ s_{D_{\theta'_2}}$

$$\iff \begin{pmatrix} \cos 2(\theta_1 - \theta_2) & -\sin 2(\theta_1 - \theta_2) \\ \sin 2(\theta_1 - \theta_2) & \cos 2(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\theta'_1 - \theta'_2) & -\sin 2(\theta'_1 - \theta'_2) \\ \sin 2(\theta'_1 - \theta'_2) & \cos 2(\theta'_1 - \theta'_2) \end{pmatrix}$$

$\iff \cos 2(\theta_1 - \theta_2) = \cos 2(\theta'_1 - \theta'_2)$ et $\sin 2(\theta_1 - \theta_2) = \sin 2(\theta'_1 - \theta'_2)$

$\iff 2(\theta_1 - \theta_2) \equiv 2(\theta'_1 - \theta'_2) \mod 2\pi$, par propriétés des fonctions cos et sin (ou encore par l'étude de la périodicité de l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$

$\iff \theta_1 - \theta_2 \equiv \theta'_1 - \theta'_2 \mod \pi$

c) La matrice de $r_\alpha \circ r_{\alpha'}$ ds la base canonique est le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha' & -\sin\alpha' \\ \sin\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' & \sim \\ \sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha' & \sim \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\alpha') & -\sin(\alpha+\alpha') \\ \sin(\alpha+\alpha') & \cos(\alpha+\alpha') \end{pmatrix}$$

On reconnait la matrice de $r_{\alpha+\alpha'}$

On montre par récurrence sur n que la composée de $2n$ symétries orthogonales (vectorielles) est une rotation. Pour $n=1$ c'est vrai par la question (b). Supposons le résultat vrai pour $n \geq 1$ alors $s_{D_{\theta_1}} \circ \cdots \circ s_{D_{\theta_{2n}}} \circ s_{D_{\theta_{2n+1}}} \circ s_{D_{\theta_{2n+2}}} = r_\alpha \circ s_{D_{\theta_{2n+1}}} \circ s_{D_{\theta_{2n+2}}}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ par hypothèse de récurrence

$= r_\alpha \circ r_{\alpha'}$ pour un certain α' par la question (b)

$= r_{\alpha+\alpha'}$ par le début de la question (c)

D'où le résultat pour $n+1$

d) Pour montrer que la composée $r_\alpha \circ s_{D_\theta}$ est la symétrie orthogonale $s_{D_{\theta+\frac{1}{2}\alpha}}$ on peut calculer le produit de matrices

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ et reconnaître la matrice $\begin{pmatrix} \cos(2\theta+\alpha) & \sin(2\theta+\alpha) \\ \sin(2\theta+\alpha) & -\cos(2\theta+\alpha) \end{pmatrix}$

On peut aussi observer que r_α est la composée $s_{D_{\theta+\frac{1}{2}\alpha}} s_{D_\theta}$ puisque $2\left(\theta+\frac{1}{2}\alpha-\theta\right)=\alpha$ (question (b))

donc $r_\alpha \circ s_{D_\theta} = s_{D_{\theta+\frac{1}{2}\alpha}} \circ s_{D_\theta} \circ s_{D_\theta} = s_{D_{\theta+\frac{1}{2}\alpha}}$

De même $s_{D_\theta} \circ r_\alpha = s_{D_\theta} \circ s_{D_\theta} \circ s_{D_{\theta-\frac{1}{2}\alpha}} = s_{D_{\theta-\frac{1}{2}\alpha}}$

(On peut aussi observer que $s_{D_\theta} \circ r_\alpha$ est l'application inverse de $r_{-\alpha} \circ s_{D_\theta} = s_{D_{\theta-\frac{1}{2}\alpha}}$ donc $s_{D_\theta} \circ r_\alpha = s_{D_{\theta-\frac{1}{2}\alpha}}$)

e) posons $u = (\cos\theta, \sin\theta)$. $D_\theta = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ donc $r_\alpha(D_\theta) = \{ r_\alpha(\lambda u), \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \{\lambda r_\alpha(u), \lambda \in \mathbb{R}\}$ puisque r_α est une application linéaire.

$r_\alpha(u) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta \\ \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$

On obtient donc $r_\alpha(D_\theta) = D_{\theta+\alpha}$

Ensuite $s_{r_\alpha(D_\theta)} \circ s_{r_\alpha(D_{\theta'})} = s_{D_{\theta+\alpha}} \circ s_{D_{\theta'+\alpha}} = r_{2(\theta-\theta')}$ par la question (b) et ceci ne dépend pas de α.

f) Cas pratique $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = 0$ $\rightsquigarrow$ $s_{D_{\theta_1}} \circ s_{D_{\theta_2}} = r_{2(\theta_1-\theta_2)} = r_\pi$

$\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_4 = 0$ $\rightsquigarrow$ $s_{D_{\theta_3}} \circ s_{D_{\theta_4}} = r_\pi$

$\theta_5 = \frac{\pi}{6}$

Alors $s_{D_{\theta_1}} \circ \dots \circ s_{D_{\theta_5}} = r_\pi \circ r_\pi \circ s_{D_{\theta_5}}$ par la question (b)

$= r_{\pi+\pi} \circ s_{D_{\theta_5}}$ par la question (c)

$= s_{D_{\theta_5}} = s_{D_{\frac{\pi}{6}}}$ puisque $r_{2\pi} = \mathrm{Id}$