Licence L3 - option de géométrie **corrigé du test 1** **3 novembre 2004**

A1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- ϕ est bilinéaire : pour tout $x \in E$, $y \mapsto \phi(y,x)$ et $y \mapsto \phi(x,y)$ sont des applications linéaires $E \to \mathbb{R}$;
- ϕ est symétrique : $\forall x, y \in E, \phi(x,y) = \phi(y,x)$;
- ϕ est définie positive : $\forall x \in E, x \neq 0 \Rightarrow \phi(x,x) > 0$.

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ est l'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + yy'$.

B1 : Soient A, B, C trois points d'une même droite avec $A \neq C$; alors $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ est l'unique réel tel que $\overrightarrow{AB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\overrightarrow{AC}$.

A2 Un sous-espace affine d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble F de E tel que pour tout $M \in F$, l'ensemble $\{N - M, N \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Ou encore c'est l'ensemble vide ou une partie de la forme $M + \overrightarrow{F}$ avec $\overrightarrow{F}$ un sous-espace vectoriel de E.

B2 Une droite affine d'un espace vectoriel E est un sous-espace affine non vide de dimension 1. C'est donc une partie de E de la forme $\{A + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ pour un point A et un vecteur non nul u de E.

A3 La droite d'équation $a^2x + 2aby - 3 = 0$ admet $(-2ab, a^2)$ comme vecteur directeur. Celui-ci est orthogonal au vecteur $(\frac{1}{2}a, b)$ puisque le produit scalaire $(-2ab, a^2)\cdot(\frac{1}{2}a, b)$ est nul. Les vecteurs directeurs de chacune des droites sont donc orthogonaux donc les droites sont orthogonales.

Pour trouver les coordonnées du point d'intersection on paramètre un point de la première droite : $M(t) = (\sqrt{3} + \frac{a}{2}t, 2 + bt)$ puis on cherche t tel que $M(t)$ soit sur la deuxième droite. On obtient $t = 2\frac{3-a^2\sqrt{3}-4ab}{a^3+4ab^2}$ puis $M(t) = (\frac{4ab^2\sqrt{3}+3a-4a^2b}{a^3+4ab^2}, \frac{2a^3+6b-2a^2b\sqrt{3}}{a^3+4ab^2})$.

B3 Puisque le point $O = (0,0)$ est commun aux deux droites (AB) et (CD), on peut invoquer le théorème de Thales : les droites (AC) et (BD) sont parallèles si et seulement si les quotients $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ et $\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$ sont égaux ; ce qui n'est pas.

Pour trouver le point d'intersection on forme une équation de chacune des droites : $2bx + y - 2ab = 0$ et $3bx + \sqrt{2}y - 3\sqrt{2}ab = 0$ puis on résoud le sytème. On obtient $x = (3\sqrt{2} + 4)a$ et $y = -(6\sqrt{2} + 6)ab$.