12 septembre 2005

Examen - 2ème session

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation

Questions de cours.

(1pt) **1.** Dans $\mathbb{R}^3$ qu'appelle t-on droite passant par deux points distincts A et B ? Que se passe t-il si $A = B$?

(1pt) **2.** Montrer que la composée de deux applications affines $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est affine.

(1pt) **3.** Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + 3z + 3 = 0$. Soit E un sous espace affine de $\mathbb{R}^3$ contenant P et le point $(0, 0, 0)$. Que peut-on dire de E ?

Exercices.

4. *Barycentre*

Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathbb{R}^2$ et G le barycentre du système $(A, \frac{1}{2}), (B, 1), (C, 1), (D, 1)$.

(1pt) **a.** Montrer qu'on a $G = A$ si et seulement si A est le centre de gravité du triangle BCD.

(2pts) **b.** Soit f une application affine $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Montrer que le barycentre du système $(A, \frac{1}{2})$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$, $(f(A), \frac{1}{2})$, $(f(B), 1)$, $(f(C), 1)$, $(f(D), 1)$ est le milieu du segment $[G, f(G)]$.

5. *Distance d'un point à une droite de* $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique : $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' + zz'$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ donnée par les équations $x + y + 2z + 2 = 0$ et $x - y + 3z + 3 = 0$. Soit A le point $(1, 1, 1)$. On propose deux méthodes pour calculer la distance de A à D.

Première méthode

(1pt) **a.** Exhiber (en donnant les coordonnées) un point B de D et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D.

(1.5pts) **b.** Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui à un réel t associe la distance du point A au point $B_t = B + t\overrightarrow{u}$ atteint son minimum en un réel t_0 à déterminer. Quelle est la distance de A à D ?

(1pt) **c.** Que peut on dire du vecteur $\overrightarrow{AB_{t_0}}$ par rapport à D ? (Justifier.)

Deuxième méthode

(1pt) **d.** Montrer que pour tout réel α le système

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2 + \alpha(x - y + 3z + 3) = 0 \\ x - y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

est un système d'équations cartésiennes de D.

(1pt) **e.** Déterminer α tel que le plan P_α d'équation $x + y + 2z + 2 + \alpha(x - y + 3z + 3) = 0$ soit orthogonal au plan P d'équation $x - y + 3z + 3 = 0$. On notera α_0 la valeur de α trouvée.

On note A_P, respectivement $A_{P_{\alpha_0}}$, le projeté orthogonal de A sur P, respectivement sur P_{α_0}. On note enfin A' le projeté orthogonal de A_P sur P_{α_0}.

(2pts) **f.** Montrer qu'on a $A' \in D$. Montrer que pour tout point M de D on a la relation $AM^2 = (AA_P)^2 + (A_PA')^2 + A'M^2$. En déduire que A' est aussi le projeté orthogonal de A sur D.

(1.5pts) **g.** Montrer qu'on a les relations $(AA_P)^2 + (A_PA')^2 = (AA_{P_{\alpha_0}})^2 + (A_{P_{\alpha_0}}A')^2$ et $(AA_P)^2 + (AA_{P_{\alpha_0}})^2 = (A_PA')^2 + (A'A_{P_{\alpha_0}})^2$. En déduire $(AA')^2 = (AA_P)^2 + (AA_{P_{\alpha_0}})^2$.

(1pt) **h.** Soient a, b, c, d quatre réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et soit P' le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. Déterminer les coordonées du projeté orthogonal de A sur P'. En déduire la distance de A à P' en fonction de a, b, c, d. (Justifier.)

(1pt) **i.** Qu'obtient-on pour la distance de A à D ? Justifier.

6. *Isométrie*

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soit f l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9x + 2y - 6z + 38 \\ 2x + 9y + 6z + 17 \\ -6x + 6y - 7z - 29 \end{pmatrix} .$$

(2pts) **a.** Montrer que la matrice

$$\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

est orthogonale. En déduire que f est une isométrie.

(1pt) **b.** L'application f admet-elle un point fixe ?

(2pts) **c.** Montrer que le plan P d'équation $x - y + 3z + 3 = 0$ est stable par f et que la restriction de f à P est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ à déterminer.

(2pts) **d.** Déterminer l'ensemble des points fixes de l'application $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$. Que peut-on dire de g ?