Licence L3 - option de géométrie — Université de Nice - Sophia Antipolis

31 janvier 2005

Examen

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction sera grandement prise en compte dans la notation

Questions de cours.

(1pt) **1.** Qu'est-ce qu'un repère orthonormé dans un espace affine euclidien ?

(1pt) **2.** Soit X un espace affine. A quelle condition sur X l'assertion suivante est elle vraie (on ne demande pas la preuve) :
"Pour toute paire de droites D, D' incluses dans X on a D parallèle à D' ou D et D' sont sécantes."

(1pt) **3.** $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application d'ensembles. Comparer par des implications (de la forme (7) $\Rightarrow$ (8)) les énoncés suivants :
(1) f est une application linéaire. (2) f est une application affine. (3) f est une application bijective.
(4) f est une translation. (5) f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine de $\mathbb{R}^2$.
(6) Pour tous $M,\ N \in \mathbb{R}^2$ on a $\mathrm{d}(f(M), f(N)) = \mathrm{d}(M, N)$.

Exercices.

(6pts) **4.** *Subdivision barycentrique dans le triangle*

Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$.

a. Soient A', B', C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ respectivement. Montrer qu'on a $A' \neq B'$ puis que la droite $(A'B')$ est parallèle à la droite (AB).

b. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C. Montrer que G est aussi l'isobarycentre des points A', B', C'.

c. On note A'' l'isobarycentre des points G, B, C, de même B'' l'isobarycentre des points G, A, C et C'' l'isobarycentre des points G, A, B. Montrer que G est l'isobarycentre des points A'', B'', C''.

d. Montrer qu'il existe une homothétie de centre G, de rapport à déterminer, transformant A en A'', B en B'' et C en C''. Montrer que cette homothétie est la seule application affine transformant le triplet (A, B, C) en (A', B', C').

e. Déduire de (d) que les points A'' et B'' sont non confondus et que la droite $(A''B'')$ est parallèle à (AB).

f. Peut on retrouver le résultat du (c) grâce au résultat du (d) ?

(6pts) **5.** *Symétries planes de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées*

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique : $((x, y, z)|(x', y', z')) = xx' + yy' + zz'$. Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = 4$. On note s_P la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P.

a. Déterminer les coordonnées de l'image du point $(0, 0, 0)$ par s_P. s_P est elle une application linéaire ?

b. Déterminer l'image par s_P de la droite passant par le point $(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $(1, 2, 3)$ (justifier le calcul).

c. Soit $P' \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$. Que peut on dire de P' par rapport à P ? Que peut on dire de la composée $s_P \circ s_{P'}$?

(6pts) **6.** *Composée d'une rotation et d'une translation*

$\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Soient α un réel et r_α la rotation vectorielle de matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On suppose que α n'est pas un multiple entier de 2π.

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

a. Montrer que l'application composée $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ r_\alpha$ admet un et un seul point fixe (on pourra vérifier que 1 n'est pas valeur propre de la partie linéaire de f). En déduire que f est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle α relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Construction du centre de f

Soient D et D' deux droites de $\mathbb{R}^2$. On sait que $t_{\overrightarrow{u}}$ est égale à la composée $s_D \circ s_{D'}$ pourvu que $\overrightarrow{u}$ soit orthogonal à D et que $D' = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(D)$. De même r_α est égal à la composée $s_D \circ s_{D'}$ pourvu que D passe par le centre de r_α et que $D' = r_{-\frac{1}{2}\alpha}(D)$.

b. Montrer qu'on peut choisir trois droites D, D', D'' telles que $t_{\overrightarrow{u}} = s_D \circ s_{D'}$ et $r_\alpha = s_{D'} \circ s_{D''}$.

c. Comment s'exprime le centre la rotation $t_{\overrightarrow{u}} \circ r_\alpha$ en fonction de D, D' et D''.

Autre méthode

d. Montrer que $f \circ f$ est une rotation de même centre que f, d'angle 2α.

Soit M un point de $\mathbb{R}^2$. L'un des trois cas suivants se présente :

(i) $M = f(M)$.

(ii) $M \neq f(M)$ et $M = f(f(M))$.

(iii) $M \neq f(f(M))$

e. Montrer que si on est dans le cas (ii) alors $\alpha = \pi$ modulo un multiple entier de 2π et le centre de f est le milieu du segment $[M, f(M)]$.

f. Montrer que si on est de le cas (iii) alors $M \neq f(M)$ et $f(M) \neq f(f(M))$. Montrer que les médiatrices des segments $[M, f(M)]$ et $[f(M), f(f(M))]$ sont non confondues et s'intersectent en le centre de f.