Licence L3 - option de géométrie — Université de Nice - Sophia Antipolis

16 janvier 2006

Examen

Durée : 3 heures

Documents et appareils électroniques interdits.

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours. On ne demande pas pour ces questions de justifier les réponses.

(2pt) **1.** On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$.

a. Qu'appelle t-on plan affine de $\mathbb{R}^3$?

b. Qu'est-ce que la donnée d'un repère orthonormé d'un tel plan affine ?

c. Comment est définie la projection orthogonale sur un tel plan affine ?

(2pt) **2.** On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de sa base orthonormée canonique.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur les réels a, b, c, d pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ soit la matrice dans la base canonique d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

b. Donner une CNS sur a, b, c, d pour que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ soit la matrice dans la base canonique d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

(2pt) **3.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application affine de partie linéaire φ.

a. Donner une CNS sur φ pour qu'on ait

$$\forall D \text{ droite de } \mathbb{R}^3,\ f(D) \text{ est une droite de } \mathbb{R}^3.$$

Donner un exemple d'application affine f et de droite D telles que $f(D)$ ne soit pas une droite.

b. Donner une condition suffisante sur φ pour que f admette un point fixe. Montrer par un exemple que cette condition n'est pas nécessaire.

Exercices. Toute affirmation doit maintenant être soigneusement justifiée.

4. *Plans dans* $\mathbb{R}^3$

(1pt) **a.** Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les points $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, -1, 1)$ et $C = (1, 1, 1)$. Montrer que A, B, C sont non alignés.

On note P_1 le plan passant par les points A, B, C.

(1.5pt) **b.** Soit A' le point $(2, -2, -3)$ et D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par les équations

$$\begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0 \\ -2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Vérifier que D est une droite de $\mathbb{R}^3$ et que A' n'est pas dans D.

On note P_2 le plan passant par A' et contenant D.

(2pt) **c.** Montrer que P_2 est parallèle à P_1 et n'est pas confondu avec P_1.

../..

(.5pt) **d.** On fixe deux réel α, β vérifiant $\alpha + \beta = 1$. Pour $M \in P_1$ on note G_M le barycentre du système $\{(A', \alpha), (M, \beta)\}$.

Calculer en fonction de α et β les coordonnées du point G_A.

(2pt) **e.** Montrer que si $\beta \neq 0$ alors l'ensemble des points G_M, M décrivant P_1, est un plan parallèle à P_1. *(On pourra montrer que cet ensemble est l'image de P_1 par une homothétie convenable puis discuter de l'image de P_1 par une homothétie.)*

Dans quel cas est-il confondu avec P_1 ? Que se passe t-il si $\beta = 0$?

(2pt) **f.** Pour $M \in P_1$ on note G'_M le barycentre du système $\{(A', \alpha), (M, \beta), (B, 1)\}$. Montrer que si $\beta \neq 0$ alors l'ensemble des G'_M, M décrivant P_1, est un plan parallèle à P_1. *(On pourra distinguer les cas $\alpha \neq -1$ et $\alpha = -1$. Dans le cas $\alpha = -1$ on pourra reconnaître l'ensemble des G'_M comme l'image de P_1 par une translation.)*

5. *Symétrie plane de $\mathbb{R}^3$*

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x - y + z - 1 = 0$. On note s la symétrie orthogonale par rapport à P.

(2pt) **a.** Quelle est la distance du point $(0, 0, 0)$ à P ? Quelle est la distance du point $(0, 0, 0)$ à son image par s ? L'application s est elle linéaire ?

(2pt) **b.** Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la partie linéaire de s.

(2pt) **c.** On considère la droite D passant par le point $A = (0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (2, -1, 1)$. Déterminer la droite image de D par s. La droite $s(D)$ est-elle confondue avec D ?

(1pt) **d.** Pour M un point de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ on note $D_{M,\overrightarrow{u}}$ la droite passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\overrightarrow{u}$ pour qu'on ait $s(D_{M,\overrightarrow{u}}) = D_{M,\overrightarrow{u}}$.

(.5pt) **e.** Si la condition ci-dessus est satisfaite, que peut-on dire de la restriction à $D_{M,\overrightarrow{u}}$ de s ?