Licence L3 - option de géométrie — Université de Nice - Sophia Antipolis

11 janvier 2007

Examen

Durée : 3 heures – tout appareil électronique interdit

Questions de cours. On ne demande pas pour ces questions de justifier les réponses.

(1pt) **1.** Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathbb{R}^3$, α, β, γ trois réels de somme non nulle et G le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$. Parmi les conditions ci-dessous, lesquelles garantissent que G est confondu avec B ?

a) $\beta = 1$ b) $\alpha + \gamma = 0$ c) $\alpha = \gamma$ d) $\beta = 0$.

(1pt) **2.** Soient A, B deux points distincts de $\mathbb{R}^3$, α, β deux réels de somme non nulle et G le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta)$. Parmi les conditions ci-dessous, lesquelles garantissent que G appartient au segment $[A, B]$:

a) $\alpha + \beta > 0$ b) $\alpha\beta > 0$ c)$\alpha < 0$ et $\beta < 0$ d) $\alpha + \beta = 0$ e) $\alpha > 0$.

(1.5pt) **3. a.** A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur les réels a, b, c, d l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (ax + by + 1, cx + dy + 1)$ est-elle une rotation ?

(2pt) **b.** A quelle condition sur $\theta \in \mathbb{R}$ l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y + 1, \sin(\theta)x - \cos(\theta)y + 1)$ admet-elle un point fixe ?

Si elle admet un point fixe, quelle est la nature de cette application ?

Exercices. Toute affirmation doit maintenant être soigneusement justifiée.

(5pt) **4.** Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application affine définie par $h(x, y) = (3x + 5y + 1, -2x - 4y - 1)$.

a. Donner la matrice de la partie linéaire de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

b. L'application h admet elle un point fixe ?

c. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A = (2, 3)$ et $B = (4, 1)$. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par h.

d. On note g la restriction de h à $\mathcal{D}$ et φ la partie linéaire de g. Calculer $\varphi(u)$ pour u dans la direction $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$. Que peut-on dire de g ?

e. Soit $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $-2x - 5y = 3$. Montrer que l'image de $\mathcal{D}'$ par h est une droite parallèle à $\mathcal{D}'$.

(5pt) **5.** $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soient $A = (1, 0, 2)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (0, 3, 1)$. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A, B, C.

a. Montrer qu'il existe un point $O \in \mathcal{P}$ et un seul vérifiant $OA = OB = OC$.

b. Montrer que l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $MA = MB$ est un plan de $\mathbb{R}^3$. En donner une équation cartésienne (dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$). Calculer de même une équation de l'ensemble des $M \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $MA = MC$.

c. Montrer que l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $MA = MB = MC$ est une droite de $\mathbb{R}^3$ qu'on notera $\mathcal{D}$. Montrer que cette droite est orthogonale à $\mathcal{P}$ puis en donner un vecteur directeur.

d. Exhiber un point de $\mathcal{D}$ et en déduire un paramétrage de $\mathcal{D}$.

e. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{D}$ on a $MA \geq OA$ avec égalité si et seulement si $M = O$. En déduire les coordonnées du point O.

../..

(8pt) **6.** L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire usuel et de la base orthonormée canonique $(i, j) = ((1, 0), (0, 1))$. Soient $\mathcal{D}$ une droite affine dans $\mathbb{R}^2$ et A, B, C trois points. On note $s_\mathcal{D}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

a. Quels sont les points fixes de l'application $s_\mathcal{D}$?

b. Montrer que si $s_\mathcal{D}(A) = B$ alors $s_\mathcal{D}(B) = A$.

c. On suppose que les trois points A, B, C sont distincts. Montrer que si l'ensemble $\{s_\mathcal{D}(A), s_\mathcal{D}(B), s_\mathcal{D}(C)\}$ est égal à $\{A, B, C\}$ alors l'un des points A, B ou C est sur $\mathcal{D}$. Montrer que si de plus les points A, B, C sont non alignés alors deux des côtés du triangle ABC ont même longueur.

d. On suppose $AB = BC = AC \neq 0$. Montrer que les trois points A, B, C sont non alignés.

e. On suppose désormais $AB = BC = AC \neq 0$. Quelles sont les symétries axiales transformant le triangle ABC en lui même ?

f. En composant deux symétries axiales convenables, montrer qu'il existe une rotation r vérifiant $r(A) = B$, $r(B) = C$ et $r(C) = A$. Quel est son centre ?

g. En utilisant le fait qu'il n'existe qu'une seule rotation vectorielle φ telle que $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC}$, montrer qu'il n'existe qu'une seule rotation r vérifiant $r(A) = B$, $r(B) = C$ et $r(C) = A$. Quelles sont les rotations transformant le triangle ABC en lui même ?

(bonus) ***h.** Montrer qu'une application affine transformant le triangle ABC en lui même admet au moins le centre de gravité de ABC comme point fixe. Quel est le groupe des isométries transformant le triangle ABC en lui même ? (*Exhiber ses éléments et la table de multiplication.*)

i. On pose $A = (1, 0)$, $B = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $C = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Existe t-il une rotation r vérifiant $r(A) = B, r(B) = C, r(C) = A$?