15 juin 2006

Examen – 2ème session

Durée : 3 heures

Documents et appareils électroniques interdits.

Questions. On ne demande pas pour ces questions de justifier les réponses.

(2.5pt) **1.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application affine de partie linéaire φ.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur φ pour qu'on ait

$$\forall P \text{ plan de } \mathbb{R}^3,\ f(P) \text{ est un plan de } \mathbb{R}^3.$$

Donner un exemple d'application affine f et de plan P telles que $f(P)$ ne soit pas un plan.

b. Comparer par des implications les conditions suivantes :

(i) $\forall P$ plan de $\mathbb{R}^3$, $f(P)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$. (ii) $\forall D$ droite de $\mathbb{R}^3$, $f(D)$ est une droite de $\mathbb{R}^3$.
(iii) $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$.

(3pt) **2.** Soient a, b, c, d quatre réels.

a. Donner une CNS sur (a, b, c, d) pour que l'ensemble $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = d\}$ soit un plan de $\mathbb{R}^3$.

Si cet ensemble n'est pas un plan, que peut-il être ?

b. Donner dans chacun des cas (1), (2) et (3) une CNS sur (a, b, c, d) pour que P soit un plan vérifiant

(1) P est parallèle au plan d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

(2) P est confondu avec le plan d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

(2) P est orthogonal à la droite passant par les points $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 1)$.

(2pt) **3.** $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application d'ensembles. Comparer par des implications (de la forme (8)⇒(9)) les conditions suivantes :

(1) f est constante (2) f est une application linéaire (3) f est une application affine
(4) f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par $(0, 0)$
(5) $f(x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$ (6) $f(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y)$ (7) f est une rotation de centre $(0, 0)$.

Exercices. Tout doit maintenant être soigneusement justifié.

4. $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. On considère les points $A = (1, 0, 2)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (0, 3, 1)$ et $D = (-1, 7, 0)$.

(1.5pt) **a.** Montrer que D est un barycentre des points A, B et C.

(1.5pt) **b.** Montrer qu'il existe un plan dans $\mathbb{R}^3$ et un seul passant par les quatre points A, B, C, D.

(1.5pt) **c.** Calculer la distance du point $(1, 3, 4)$ à ce plan.

(3pt) **5.** $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soient D_1, D_2, D_3 trois droites distinctes de $\mathbb{R}^3$ concourantes en un point O. Pour $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ on note $P_{i,j}$ le plan passant par les droites D_i et D_j. On suppose que les plans $P_{i,j}$ sont deux à deux orthogonaux. Montrer que les droites D_1, D_2, D_3 sont orthogonales entre elles.

../..

6. Composée de symétries orthogonales dans le plan.

$\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Pour $a \in \mathbb{R}$ on note D_a la droite d'équation $x - a = 0$. Toujours pour $a \in \mathbb{R}$ on note s_a la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_a et t_a la translation de vecteur $(a, 0)$.

(1pt) **a.** Montrer que pour a, b deux réels, la composée $s_a \circ s_b$ est la translation de vecteur $(2(a-b), 0)$. En déduire qu'on a $s_a \circ s_b = s_c \circ s_d$ si et seulement si $a - b = c - d$.

(1pt) **b.** Soient a, b deux réels. Montrer que $t_b \circ s_a$ est la symétrie s_x pour un réel x à déterminer *(On pourra d'abord chercher l'ensemble des points fixes de $t_b \circ s_a$).* Que peut-on dire de $s_a \circ t_b$?

(1pt) **c.** Soient a, b, c trois réels. Montrer que $s_a \circ s_b \circ s_c = s_x$ pour un réel x à déterminer.

(1pt) **d.** Montrer par récurrence sur n que la composée $s_{a_1} \circ \cdots \circ s_{a_n}$ est soit une symétrie centrale soit une translation suivant la parité de n.

(1pt) **e.** Cas pratique : $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = -3$, $a_4 = 2$, $a_5 = 5$. Déterminer l'axe de la symétrie $s_{a_1} \circ \cdots \circ s_{a_5}$.