Licence L3 - option de géométrie Université de Nice - Sophia Antipolis

11 juin 2007

Examen – 2ème session

Durée : 3 heures – documents et appareils électroniques interdits

Questions. On ne demande pas pour ces questions de justifier les réponses.

(4pt) **1.** Soient a, b, c, d quatre réels et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y) = (ax + by + \frac{\sqrt{3}}{2}, cx + dy - \frac{1}{2}) .$$

Dans chacun des cas suivants indiquer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) pour que l'application f vérifie la propriété donnée :

a. f est linéaire.

b. f admet un et un seul point fixe.

c. f est une homothétie.

d. f est une translation.

e. f est une rotation.

(1.5pt) **2.** Soient A, B, C, D quatre points du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ tels qu'aucune droite affine ne contienne trois d'entre eux. On note $ABCD$ le quadrilatère dont les côtés sont les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. (Le quadrilatère $ABCD$ est donc égal au quadrilatère $BADC$ mais pas à $BACD$.) Donner une définition précise de :

a. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

b. Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

c. Le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

Exercices. Toute affirmation doit maintenant être soigneusement justifiée.

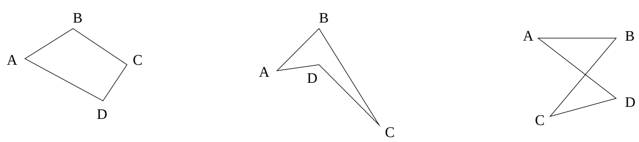
(4pt) **3.** On considère le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application affine bijective.

a. Soient A, B deux points de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'image par f du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$.

b. Soient maintenant A, B, C, D quatre points distincts du plan. Montrer que si le segment $[AB]$ instersecte la droite (CD) alors le segment $[f(A)f(B)]$ intersecte la droite $(f(C)f(D))$.

Est-il possible que les segments $[AB]$ et $[CD]$ s'intersectent sans que ce soit le cas des segments $[f(A)f(B)]$ et $[f(C)f(D)]$? (Justifier.)

c. On suppose qu'aucune droite affine ne contient trois des points A, B, C, D. Le quadrilatère $ABCD$ (voir la convention adoptée en question 2 quant à l'énumération des sommets) peut être de trois types :



Convexe Concave Croisé

Que peut on déduire des questions ci-dessus quant au type du quadrilatère $f(A)f(B)f(C)f(D)$?

../..

d. Le résultat de la question a reste t-il vrai si on suppose seulement que f est une application continue ? différentiable ? conservant les distances ? (Justifier.)

(3pt) **4.** On considère le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soit r une rotation de $\mathbb{R}^2$ différente de l'identité, $\triangle$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$ et $s_\triangle$ la symétrie orthogonale par rapport à $\triangle$. A quelle condition sur le centre de r la composée $r \circ s_\triangle$ est elle une symétrie orthogonale ?

(10pt) **5.** On considère quatre points distincts A, B, C, D du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer qu'on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.

On indique la définition suivante : Le quadrilatère $ABCD$ est un carré si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AD}$ et les distances AB et AD sont égales. (Voir la convention adoptée en question 2 quant à l'énumération des sommets.) Cette définition est relative au sommet A (on devrait dire $ABCD$ est carré en A). La question suivante montre qu'en fait être un carré ne dépend pas du choix d'un sommet.

b. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le quadrilatère $ABCD$ est un carré (au sens donné ci-dessus).

(ii) La droite (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$, la droite (BD) est la médiatrice du segment $[AC]$ et les longueurs AC et BD sont égales.

On suppose dans les questions suivantes que le quadrilatère $ABCD$ est un carré. Soit par ailleurs $\triangle$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$. On note $s_\triangle$ la symétrie orthogonale par rapport à $\triangle$.

c. Montrer que si les ensembles $\{A, B, C, D\}$ et $\{s_\triangle(A), s_\triangle(B), s_\triangle(C), s_\triangle(D)\}$ sont égaux et si $s_\triangle(A) = A$ alors $s_\triangle(C) = C$. Que peut on dire alors de $\triangle$?

d. Montrer inversement qu'on peut choisir $\triangle$ de sorte qu'on ait $\{A, B, C, D\} = \{s_\triangle(A), s_\triangle(B), s_\triangle(C), s_\triangle(D)\}$ et $s_\triangle(A) = A$.

e. Montrer que si la droite $\triangle$ vérifie $s_\triangle(A) = C$ alors $s_\triangle(B) = B$ et $s_\triangle(D) = D$. Existe t-il une droite $\triangle$ ayant ces propriétés ?

f. Montrer que si la droite $\triangle$ vérifie $s_\triangle(A) = B$ alors $s_\triangle(C) = D$. Existe t-il une droite $\triangle$ ayant ces propriétés ?

g. Quelles sont les symmétries orthogonales transformant le carré $ABCD$ en lui même ?

h. Soit r une rotation transformant le carré $ABCD$ en lui même. Que peut on dire de son centre ?

i. Quelles sont les rotations du plan $\mathbb{R}^2$ transformant le carré $ABCD$ en lui même ? (On pourra utiliser le fait que la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale ayant un point fixe commun est une symétrie orthogonale.)

j. Y a t-il d'autres isométries que celles mentionnées ci-dessus transformant le carré $ABCD$ en lui même ?