Licence L3 - option de géométrie — Université de Nice - Sophia Antipolis

7 novembre 2005

Examen partiel

Durée : 2 heures

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation

Questions de cours.

(1pt) **1.** Qu'appelle t-on repère cartésien d'un espace affine X de dimension finie ?

(2pt) **2.** Soient X, Y deux espaces affines et $f : X \to Y$ une application affine. Montrer que $f(X)$ est un sous-espace affine de Y.

(2pt) **3.** Soient a, b, c trois réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Montrer que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by + c = 0\}$ est un sous-espace affine non vide de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

Exercices.

4. *Egalité entre sous-espaces affines*

(2pt) **a.** Soit P_0 le sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ formé des quadruplets (x, y, z, t) vérifiant les équations

$$\begin{cases} 2x + y - t = 1 \\ x + y - 2z + t = 2 \end{cases} .$$

Montrer que P_0 est de dimension 2.

(2pt) **b.** Soit P_1 le sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ engendré par les points $A_1 = (0, 2, \frac{1}{2}, 0)$, $A_2 = (1, 0, 0, 0)$, $A_3 = (1, 1, 1, 1)$ et $A_4 = (-1, 2, -1, -2)$. Montrer que P_1 est de dimension 2 et est parallèle à P_0.

(1.5pt) **c.** Soit P_2 le plan de $\mathbb{R}^4$ passant par $(1, 0, 0, 1)$ et parallèle à P_1. Montrer qu'on a $P_2 = P_0$.

(1pt) **d.** Soit P un plan non parallèle à P_0. Que peut-on dire de $P \cap P_0$? (Argumenter.)

5. *Droites et barycentres*

Soient D_1 et D_2 deux droites d'un plan affine $\mathcal{P}$. On suppose pour commencer que D_1 est parallèle à D_2.

(2pt) **a.** Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\alpha + \beta = 1$. Montrer que l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$\exists A \in D_1, \exists B \in D_2, M = \mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta))$$

est une droite parallèle à D_1. On la note $D_{\alpha,\beta}$.

(1pt) **b.** Soit D une droite parallèle à D_1. Montrer qu'il existe un unique couple (α, β) de réels vérifiant $\alpha + \beta = 1$ et $D = D_{\alpha,\beta}$.

On suppose maintenant D_1 et D_2 sécantes en un point O. Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de D_1 et $\overrightarrow{v}$ un vecteur qui n'est pas dans la direction de D_2 (en particulier $\overrightarrow{v} \neq 0$). Pour $A \in D_1$ on note x_A la coordonnée de A dans le repère $(O, \overrightarrow{u})$. Si A, B sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ on note $x_{\overrightarrow{AB}}$ le réel vérifiant $\overrightarrow{AB} = x_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{v}$.

(1.5pt) **c.** Soient $A \in D_1$ et $B \in D_2$ deux points tels que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$. Montrer que si $x_A \neq 0$ alors le rapport $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_A}$ ne dépend pas du choix de A et B. Montrer que si $x_A = 0$ alors $A = B = O$.

(1.5pt) **d.** Montrer que pour tout point $A \in D_1$, il existe $B \in D_2$ tel que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$.

(2pt) **e.** Montrer que le sous-ensemble $D_{\alpha,\beta,\overrightarrow{v}}$ formé des points M du plan vérifiant

$$\exists A \in D_1, \exists B \in D_2, \overrightarrow{AB} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{v} \text{et} M = \mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta))$$

est une droite passant par O.

../..

(2pt) **f.** On suppose $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ et que D_1, respectivement D_2, admet pour équation cartésienne $x+2y+3=0$, respectivement $2x+y+1=0$ (dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$). Trouver $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ en fonction de α et β tel que $D_{\alpha,\beta,\overrightarrow{v}}$ admette pour équation $\alpha(x+2y+3)+\beta(2x+y+1)=0$.