Licence L3 - option de géométrie Université de Nice - Sophia Antipolis

16 novembre 2006

Examen partiel

Durée : 2 heures – tout appareil électronique interdit

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation

Questions de cours. On ne demande pas pour ces questions de justifier les réponses.

(1pt) **1.** Soit E l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + xz = 1\}$. Indiquer le ou les énoncés vrais dans la liste ci-dessous :
a) E est un plan de $\mathbb{R}^3$ b) E est une droite de $\mathbb{R}^3$ c) E est l'ensemble vide d) E ne vérifie ni a ni b ni c.

(1pt) **2.** Soit f l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x + y + xz$. Indiquer le ou les énoncés vrais dans la liste ci-dessous :
a) f est affine b) f est linéaire c) f est continue d) f ne vérifie ni a ni b ni c.

(1pt) **3.** Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{Q}$ l'intersection de $\mathcal{P}_1$ avec $\mathcal{P}_2$. Indiquer le ou les énoncés parmis la liste ci-dessous dont on sait qu'ils sont faux :
a) $\mathcal{Q}$ est vide b) $\mathcal{Q}$ est un point c) $\mathcal{Q}$ est une droite d) $\mathcal{Q}$ est un plan e) $\mathcal{Q}$ est $\mathbb{R}^3$ entier.

Exercices. Toute affirmation doit maintenant être soigneusement justifiée.

(3pt) **4.** Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathbb{R}^3$ et α, β, γ trois réels vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Montrer que le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ est sur la droite (AC) si et seulement si $\beta = 0$.

5. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z + 1 = 0\}$. Soit A le point $(1, 2, 3)$.

(1pt) **a.** Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace affine non vide de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 et que A n'est pas dans $\mathcal{P}$.

(1pt) **b.** Trouver une équation du plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par A.

(1.5pt) **c.** Trouver un repère cartésien de $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire un point de $\mathcal{P}$ et une base de la direction de $\mathcal{P}$). En déduire un paramétrage de $\mathcal{P}$ par $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire une bijection $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}$).

(3pt) **d.** Trouver un vecteur $u_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{P}'$ soit l'image de $\mathcal{P}$ par la translation t_{u_0} de vecteur u_0.

Montrer que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ on a $t_{u_0+v}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' \Leftrightarrow t_v(\mathcal{P}') = \mathcal{P}'$. Quels sont les $v \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $t_v(\mathcal{P}') = \mathcal{P}'$? Quels sont les $u \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $t_u(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$?

(3pt) **e.** Soient B un point de $\mathbb{R}^3$ et h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$. Montrer qu'on a $h(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ si et seulement si il existe un point M de $\mathcal{P}$ tel que $h(M) = A$. En déduire l'ensemble des $B \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{P}'$ soit l'image de $\mathcal{P}$ par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.

6. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les éléments $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, -2, -1)$ et $u = (1, 1, 1)$. On note $\mathcal{P}$ le sous-espace affine engendré par A, B, C.

(1pt) **a.** Montrer que $\mathcal{P}$ est non vide de dimension 2 et que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en est un repère cartésien.

(2pt) **b.** Soit $M = (x, y, z)$ un point de $\mathbb{R}^3$. Trouver les coordonnées dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de l'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite passant par M et de vecteur directeur u.

(2pt) **c.** Quelle est l'expression en coordonnées (ou matricielle) de l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui à un point M associe son projeté sur $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par u ?