1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

1.1. Rappel d'algèbre linéaire

D'abord $\mathbb{R}$ est un corps commutatif. Cela veut dire que $\mathbb{R}$ est muni d'une addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et d'une multiplication $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés adéquates.

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est un ensemble, disons E, muni d'une addition $+ : E \times E \to E$ et d'une multiplication externe $\mathbb{R} \times E \to E$ telles que

(i) $(E, +)$ est un groupe commutatif (on dit aussi groupe abélien),

(ii) la multiplication externe est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition,

(iii) on a $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$ et $1 \cdot x = x$.

Attention : un espace vectoriel n'est pas juste un ensemble ; c'est la donnée d'un ensemble, d'une addition et d'une multiplication externe.

Exemple : $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ de réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition des n-uplets composante par composante $((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n))$ et pour la multiplication par un scalaire composante par composante $(\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n))$.

Terminologie. On appelle vecteur un élément d'un espace vectoriel. On rencontrera les notations u, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AB}$.

Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un sous-ensemble $F \subset E$ vérifiant : F est non vide, est stable par l'addition de E et par la multiplication par un scalaire. C'est alors un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire.

1.2. Colinéarité de deux vecteurs

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u, v deux éléments de E.

Définition. On dit que u et v sont colinéaires (ou encore liés) s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls tels que $\lambda u + \mu v$ soit l'élément 0 de E.

Proposition. Soient u, v deux éléments d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

(a) Si v est nul alors u et v sont colinéaires.

(b) Supposons $v \neq 0$. Alors u et v sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'on ait $u = \lambda v$, auquel cas le réel λ est unique.

Terminologie. Si $u = \lambda v$ on dira que u est colinéaire à v.

Le point (b) montre que si v est un vecteur non nul de E alors l'ensemble des vecteurs colinéaires à v est un sous-espace vectoriel de E admettant l'ensemble $\{v\}$ pour base. C'est donc un espace vectoriel de dimension 1 (on dit aussi droite vectorielle).

Exercice. Deux droites vectorielles de E sont soit confondues, soit d'intersection égale à $\{0\}$.

Exercice. Caractérisation dans $\mathbb{R}^2$ par le déterminant : Notons par un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Deux vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$ est nul.

On note $< u, v >$ le sous-espace vectoriel de E engendré par deux vecteurs u et v : c'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant u et v.

Proposition. Soient u, v deux vecteurs non colinéaires d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ; alors

(a) Tout élément w de $< u, v >$ s'écrit $w = \lambda u + \mu v$ pour un et un seul couple (λ, μ) de réels.

(b) Si $E = \mathbb{R}^2$ alors $< u, v >= E$.

Le point (a) dit que l'ensemble $\{u,v\}$ est une base du sous-espace vectoriel de E engendré par u et v. Ce sous-espace est donc un espace vectoriel de dimension 2 (on dit aussi plan vectoriel). Les points (a) et (b) montrent que deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice. Soient $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. Le déterminant $ad-bc$ est donc non nul. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^2$; alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est égal $\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ pour $\lambda=\frac{xd-yc}{ad-bc}$ et $\mu=\frac{ay-bx}{ad-bc}$. Ceci prouve le point (b) de la proposition ci-dessus.

Exemple : Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ qu'on appelle base canonique. Tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ s'écrit de façon évidente $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Il est facile de trouver un vecteur qui ne lui soit pas colinéaire, par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

Formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$

On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E une application $f: E\to\mathbb{R}$ vérifiant pour tout u,v dans E et pour tout λ dans $\mathbb{R}$, $f(u+v)=f(u)+f(v)$ et $f(\lambda u)=\lambda f(u)$. (Ces propriétés disent exactement que f est linéaire.)

Prenons $E=\mathbb{R}^2$ et soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une forme linéaire. Posons $a=f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $b=f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$; on a par linéarité $\forall\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2, f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})=ax+by$.

Inversement soit a,b deux réels et définissons $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})=ax+by$; alors f est une forme linéaire.

1.3. Droites affines de $\mathbb{R}^2$.

Notation : Soient M,N deux points d'un espace vectoriel E. On note $\overrightarrow{MN}$ le vecteur de E tel que $N=M+\overrightarrow{MN}$ pour l'addition de E. Si $E=\mathbb{R}^2$, $M=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a donc $\overrightarrow{MN}=\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$

Question : Pourquoi parle t-on tantôt de vecteur, tantôt de point dans $\mathbb{R}^2$?

Définition. On appelle sous-espace affine d'un espace vectoriel E un sous-ensemble $F\subset E$ vérifiant :

Pour tout point M de F, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, N décrivant F, est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice. Soient F un sous-espace affine non vide d'un espace vectoriel E et M_0 un point de F. Montrer que les sous-ensembles de E : $\{\overrightarrow{MN}, M,N\in F\}$ et $\overrightarrow{M_0N}, N\in E\}$ coïncident. En partuculier le second ne dépend pas du choix de M_0.

Terminologie. Lorsque F est un sous-espace affine non vide d'un espace vectoriel E, on appelle direction de F, et on note souvent $\overrightarrow{F}$, le sous-espace vectoriel formé des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, M et N décrivant F. On appelle dimension de F la dimension de sa direction $\overrightarrow{F}$. Les sous-espaces affines de dimension 1 sont appelés droites affines, ceux de dimension 2 sont appelés plans affines. Par abus de langage on appelle point de E à la fois un élément de E et le sous-ensemble de E formé de ce seul élément.

Exercice. Les sous-ensembles de E formés d'un seul élément sont exactement les sous-espace affines de E de dimension 0, c'est à dire ceux dont la direction est le sous-espace vectoriel nul $\{0\}$.

Proposition. Soit D un sous-ensemble d'un espace vectoriel E ; alors D est une droite affine si et seulement si il existe un élément $A\in E$ et un vecteur non nul $u\in E$ tels que D soit l'ensemble $\{M\in E, \overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $u\}$. On dit alors que u est un vecteur directeur de D et que D est la droite passant par A et de vecteur directeur u.

Proposition. Soit D une droite affine d'un espace vectoriel E.

(a) L'ensemble des vecteurs directeurs de D est égale à l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, (A,B) décrivant les couples de points distincts de D.

(b) Deux vecteurs directeurs de D sont colinéaires.

Paramétrisation d'une droite affine de $\mathbb{R}^2$

Soit D la droite affine de $\mathbb{R}^2$ passant par un point $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$; alors D est l'ensemble des points décrits par l'arc paramétré $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \alpha t + a \\ y(t) = \beta t + b \end{array}\right.$ et inversement.

Equation cartésienne d'une droite affine de $\mathbb{R}^2$

Proposition. Soient a, b, c trois réels avec a et b non tous deux nuls.

(a) L'ensemble des points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ passant par le point $(-\frac{c}{a}, 0)$ si $a \neq 0$, par le point $(0, -\frac{c}{b})$ sinon.

(b) Inversement la droite passant par $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ coïncide avec l'ensemble des points solutions de l'équation $ax + by - a\alpha - b\beta = 0$.

Terminologie. On dit que l'équation $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite formée de l'ensemble des points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ solutions.

Interprétation : La droite d'équation $ax + by + c = 0$ s'interprète comme l'image réciproque de $-c$ par la forme linéaire $f : (x, y) \mapsto ax + by$. Sa direction est le noyau de f $(\mathrm{Ker}(f) = \{u \in \mathbb{R}^2, f(u) = 0\})$.

Exercice. Soient a, b, c trois réels avec a et b non tous deux nuls et soit D la droite d'équation $ax+by+c = 0$. Quels sont les autres équations cartésiennes de D ?

Définition. On dit que deux droites affines sont parallèles si elles ont même direction (donc si elles admettent un même vecteur directeur). On dit qu'elles sont sécantes si leur intersection est réduite à un point.

Voici les premiers énoncés de la géométrie affine dans $\mathbb{R}^2$:

Proposition. Dans $\mathbb{R}^2$:

(a) Par deux points distincts il passe une et une seule droite.

(b) Deux droites affines sont soit sécantes soit parallèles.

(c) Par un point donné il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

Les énoncés (a) et (c) sont encore vrais dans un espace de dimension supérieure à 2. L'énoncé (b) est faux dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice. Déduire de cette proposition que deux droites parallèles sont soient confondues soit disjointes.

Faisceau de droites

Définition. Un faisceau de droites est soit l'ensemble des droites affines passant par un point donné, soit l'ensemble des droites parallèles à une droite donnée.

Proposition. Soient D, D' deux droites non confondues de $\mathbb{R}^2$ d'équation respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Il existe un et un seul faisceau de droites contenant D et D' : c'est l'ensmble des droites d'équation $\alpha(ax + by + c) + \beta(a'x + b'y + c') = 0$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls.

Exercice. Quel est l'ensemble des droites d'équation $ax+by+c+\beta(a'x+b'y+c') = 0$, β décrivant $\mathbb{R}$?

1.4 Mesure algébrique sur la droite

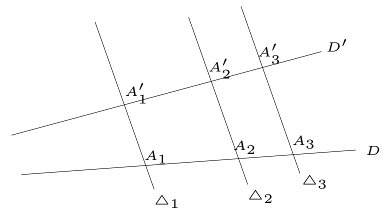
Soient D une droite affine d'un espace vectoriel E et u un vecteur directeur de D. Soient A, B deux points de D ; on appelle mesure (ou longueur) algébrique du segment $[A, B]$ relativement à u le réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda u$. On la note $\overline{AB}$.

Soient A, B, A', B' quatre points de D, avec A' distinct de B'. Le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ (bien défini !) ne dépend pas du choix du vecteur directeur u.

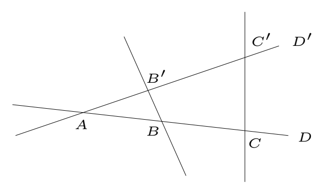
Le théorème suivant résulte de ce que deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$:

Théorème [de thales]. Soient D et D' deux droites du plan $\mathbb{R}^2$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ et $\triangle_3$ trois droites parallèles entre elles coupant D en les points A_1, A_2, A_3 et D' en A_1', A_2', A_3' respectivement. On suppose $\triangle_1$ et $\triangle_3$ non confondues alors on a l'égalité

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{A_1'A_2'}}{\overline{A_1'A_3'}} .$$



Théorème. Soient D et D' deux droites du plan $\mathbb{R}^2$ sécantes en un point A, B, C deux points de D distincts de A et B', C' deux points de D' également distincts de A. Alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles si et seulement si on a l'égalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$.



1.5 Barycentre

2. Structure euclidienne canonique sur l'espace $\mathbb{R}^2$