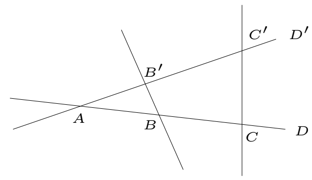
Théorème. Soient D et D' deux droites du plan $\mathbb{R}^2$ sécantes en un point A, B, C deux points de D distincts de A et B', C' deux points de D' également distincts de A. Alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles si et seulement si on a l'égalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$.



Exercice. Montrer que chacun de ces deux théorèmes se déduit de l'autre.

1.5. Barycentre

Soient E un $\mathbb{R}$ espace vecoriel, n un entier strictement positif, $A_1, \ldots, A_n$ n points de E, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n réels. On étudie la fonction $\varphi : E \to E$, $M \mapsto \sum_{1\le i\le n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Proposition. Avec les données ci-dessus

(a) Si $\sum_{1\le i\le n} \alpha_i$ est nul alors $\varphi(M)$ ne dépend pas de M.

(b) Si $\sum_{1\le i\le n} \alpha_i$ est non nul alors il existe un unique point G tel que $\varphi(G) = 0$ et on a pour tout point M $\varphi(M) = (\sum_{1\le i\le n} \alpha_i)\overrightarrow{GM}$. En particulier l'application φ est bijective.

Preuve : on compare, pour M et M' deux points de E, $\varphi(M)$ et $\varphi(M')$:

$$\varphi(M') = \varphi(M) + (\sum_{1\le i\le n} \alpha_i)\overrightarrow{MM'} \ .$$

Si $(\sum_{1\le i\le n} \alpha_i)$ est non nul on appelle barycentre du système de points pondérés (A_i, α_i) le point G tel que $\varphi(G) = 0$.

Terminologie. On dit aussi que G est le barycentre des points A_i affectés des poids α_i. On dit qu'un point M de E est un barycentre des points A_i s'il existe n-réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que M soit le barycentre du système (A_i, α_i). On appelle isobarycentre des points A_i le barycentre des points A_i affectés chacun du poids 1.

Il existe un plus petit sous-espace affine de E contenant tous les A_i : c'est l'intersection de tous les sous-espaces affines de E contenant chacun des A_i. On l'appelle le sous-espace affine engendré par les A_i.

Proposition. Soient $A_1, \ldots, A_n$ n points d'un espace vectoriel E. L'ensemble des barycentres des points A_i coïncide avec le sous-espace affine de E engendré par les A_i.

Exemple. Soient A et B deux points distincts de E. L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB). L'ensemble des barycentres des points A et B affectés de poids positifs est le segment $[A, B]$. Voir à ce propos le paragraphe sur la convexité.

Transitivité dans le calcul du barycentre

Proposition. Soient m et n deux entiers strictement positifs, $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le m}$ et $(B_j, \beta_j)_{1\le j\le n}$ deux systèmes de points pondérés d'un espace vectoriel E. On suppose que les scalaires $\sum_{1\le j\le n} \beta_j$ et $\sum_{1\le i\le m} \alpha_i + \sum_{1\le j\le n} \beta_j$ sont tous deux non nuls. On note B le barycentre du système (B_j, β_j). Alors le barycentre du système de $m+n$ points pondérés $(A_i, \alpha_i), (B_j, \beta_j)$ coïncide avec le barycentre des $m+1$ points pondérés $(A_i, \alpha_i), (B, \sum_{1\le j\le n} \beta_j)$.

Preuve : les applications $\varphi : E \to E$ associées à chacun de ces systèmes de points pondérés sont les mêmes.

Première application. Soit ABC un triangle non dégénéré du plan. Les trois médianes s'intersectent en l'isobarycentre des points A, B, C (donc sont concourrantes).

1.6. Compléments sur le chapitre 1

Egalité de deux droites affines

Soit E un espace vectoriel. La définition que nous avons donnée d'une droite affine de E est celle d'un sous-espace affine non vide de E dont la direction est de dimension 1, c'est à dire est un sous-espace vectoriel de E engendré par un vecteur non nul. Nous avons rencontré plusieurs caractérisations d'une droite affine : droite passant par un point A de vecteur directeur u ($u \neq 0$), droite passant par deux points distincts A, B, et, dans $\mathbb{R}^2$, droite d'équation cartésienne donnée.

Une droite affine de E est un sous-ensemble de E (vérifiant certaines propriétés). Par définition, deux droites affines de E sont égales si et seulement si elles ont les mêmes éléments.

Proposition.

(a) Deux droites affines de E sont égales si et seulement elles admettent un point commun et si elles ont même direction.

(b) La droite passant par un point A et de vecteur directeur u est égale à la droite passant par un point B et de vecteur directeur v si et seulement si u et v sont colinéaires et si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à u.

(c) Soient $A \neq B$ et $C \neq D$ quatre points de E. Les droites (AB) et (CD) sont égales si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et si $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

(d) Dans $\mathbb{R}^2$ deux droites d'équation respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont égales si et seulement si les triplets (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels (c'est-à-dire s'ils sont colinéaires comme éléments de $\mathbb{R}^3$).

Mesure algébrique sur un faisceau de droites parallèles

Un faisceau de droites parallèles est l'ensemble des droites parallèles à une droite donnée. Il est donc caractérisé par la donnée d'un vecteur non nul de E, vecteur directeur commun à chacune des droites du faisceau. On appelle mesure algébrique sur les droites du faisceau relativement à u l'application qui à un couple de points M, N d'une même droite du faisceau associe l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{MN} = \lambda u$. On note ce scalaire $\overline{MN}$.

Soient (M, N), (M', N') deux couples de points, chacun des couples étant formé de deux points d'une même droite du faisceau et M' étant distincts de N'. Le quotient $\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}}$ ne dépend pas du choix du vecteur u.

On complète le second théorème de Thales donné en section 1.4 :

Théorème. Soient D et D' deux droites du plan $\mathbb{R}^2$ sécantes en un point A. Soient B, C deux points de D distincts de A et B', C' deux points de D' également distincts de A. Alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles si et seulement si on a l'égalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}$.

Exercice. Y a t-il une relation entre les grandeurs $\overline{A_1A_1'}$, $\overline{B_1B_1'}$ et $\overline{C_1C_1'}$ sous les hypothèses du premier théorème de Thales ?

2. Structure euclidienne canonique sur l'espace $\mathbb{R}^2$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ — on notera uv l'image d'un couple (u, v) — vérifiant les propriétés suivantes :

- Pour tout $u \in E$, l'application $E \to \mathbb{R}$, $v \mapsto uv$ est linéaire. De même pour tout $v \in E$ l'application $u \mapsto uv$ est linéaire. (On dit alors que l'application $(u, v) \mapsto uv$ est bilinéaire.)
- On a l'égalité $uv = vu$ pour tous $u, v \in E$. (On dit que l'application $(u, v) \mapsto uv$ est symétrique.)
- uu est strictement positif dès que u est différent de 0.

Terminologie. On appelle espace vectoriel euclidien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exemple. Soit n un entier strictement positif. L'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

est un produit scalaire qu'on appelle produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Orthogonalité.

Définition. On dit que deux vecteurs u, v d'un espace vectoriel euclidien E sont orthogonaux si leur produit scalaire uv est nul. On dit que deux sous-espaces vectoriels F, G de E sont orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G. On dit que deux sous-espaces affines non vides de E sont orthogonaux si leurs directions sont orthogonales.

Soit F un sous-espace affine non vide de E et u un vecteur. On dira que u est orthogonal à F si u est orthogonal à tout vecteur de la direction de F.

Proposition. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique :

(a) Soient a, b, c trois réels avec a et b non tous deux nuls. Le vecteur $\binom{a}{b}$ est un vecteur non nul orthogonal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et tout vecteur orthogonal à cette droite lui est colinéaire.

(b) Soient $\binom{a}{b}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ et $A = \binom{x_0}{y_0}$ un point de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\binom{a}{b}$ est la droite d'équation $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$. C'est l'unique droite passant par A et orthogonale à u.

Terminologie. Dans $\mathbb{R}^2$ on appelle vecteur normal à une droite affine un vecteur non nul orthogonal à cette droite.

Norme et distance.

Soit E un espace vectoriel eucidien. L'application $E \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \sqrt{uu}$ (bien définie!) est une norme sur E qu'on note $u \mapsto \|u\|$: c'est une application vérifiant

- Pour tout $u \in E$, $\|u\|$ est positif et est nul si et seulement si u est nul.
- Pour tous $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.
- Pour tous $u, v \in E$, on a $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

On l'appelle la norme euclidienne sur E.

Proposition. Soient u, v deux éléments d'un espace vectoriel euclidien ;

(a) On a $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2uv$.

(b) On a $|uv| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

L'application $E \times E \to \mathbb{R}$, $(M, N) \mapsto \|\overrightarrow{MN}\|$ est une distance sur E qu'on note $(M, N) \mapsto MN$: c'est une application vérifiant :

- Pour tous $M, N \in E$, MN est positif et est nul si et seulement si M égale N.
- Pour tous $M, N, P \in E$ on a $MP \leq MN + NP$. (C'est l'inégalité triangulaire.)

On l'appelle la distance euclidienne sur E.

Le point (b) de la proposition ci-dessus donne tout de suite le théorème de Pythagore : Si ABC est un triangle rectangle en A alors on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Exercice. Montrer la réciproque du théorème de Pythagore.

Exercice. Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrer que si ABC est un triangle dont on note A' le milieu du côté BC, on a la relation $AB^2 + AC^2 = \frac{BC^2}{2} + 2AA'^2$. Inversement montrer que si E est muni d'une norme telle que la distance associée vérifie la relation ci-dessus, alors cette norme provient d'un produit scalaire.