Soient $(A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ un système de n points pondérés d'un espace vectoriel euclidien E. Soit φ l'application $E \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \sum_i \alpha_i (MA_i)^2$. On a $\varphi(M') = \varphi(M) + (\sum_i \alpha_i)(MM')^2 + \overrightarrow{M'M} \cdot (\sum_i \alpha_i \overrightarrow{MA_i})$ de sorte que :

- Si $\sum_i \alpha_i$ est nul, φ est constante.
- Si $\sum_i \alpha_i$ est non nul, on a $\varphi(M) = \varphi(G) + (\sum_i \alpha_i)(GM)^2$ où G est le barycentre du système (A_i, α_i).

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Soient A, B deux points d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On appelle segment joignant A et B et on note $[A, B]$ l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de poids positifs. C'est une partie de la droite (AB) si A est distinct de B, le singleton $\{A\}$ si $A = B$.

Exercice. Pour $A \neq B$ montrer les égalités

$$[A, B] = \{M \in E, \exists\lambda \in [0, 1], \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}\} = \{M \in (AB), \overline{MA} \cdot \overline{MB} \le 0\} .$$

Proposition. Soient E un espace vectoriel euclidien et A, B deux points de E. On a l'équivalence

$$MA + MB = AB \Leftrightarrow M \in [A, B] .$$

Preuve : Supposons A distinct de B. On se ramène à montrer que pour u et v deux vecteurs de E avec $v \neq 0$ on a $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ si et seulement si $\exists\lambda > 0, u = \lambda v$. La première égalité élevée au carré (les deux termes sont positifs) se traduit par $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\|$. Ceci n'est possible que si u et v sont colinéaires (proposition 3.1) et si $u \cdot v$ est positif.

Distance entre deux sous-espaces affines

Soient F et G deux sous-espaces affines non vide d'un espace vectoriel euclidien. L'ensemble des distances entre deux points de F et de G respectivement est une partie non vide minorée (par 0) de $\mathbb{R}$.

Définition. On appelle distance entre F et G le réel $\mathrm{Inf}_{M\in F, N\in G} MN$.

Distance entre un point et une droite dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, entre un point et un plan ou entre deux droites dans $\mathbb{R}^3$: voir TD.

4. Espaces affines abstraits, applications affines.

4.1. Espaces affines

Définition. Un espace affine est un triplet formé d'un ensemble X, d'un espace vectoriel E et d'une application $X \times X \to E$, qu'on note $(M, N) \mapsto \overrightarrow{MN}$, vérifiant :

- Pour tout élément A de X l'application $X \to E$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$ est bijective.
- Pour tout triplet A, B, C d'éléments de X on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

Terminologie. On note pour faire court X l'espace affine $(X, E, X \times X \to E)$. Lorsque X est non vide on appelle E la direction de X et on la note $\overrightarrow{X}$. On appelle dimension de X la dimension de sa direction comme espace vectoriel, c'est à dire le cardinal d'une de ses bases.

Exemple.

- Soit X un ensemble réduit à un seul élément. (On dit aussi un point, au risque d'une confusion car on appelle également point un élément d'un espace affine !) Il existe un unique $\mathbb{R}$-espace vectoriel E (à isomorphisme près) et une seule application $X \times X \to E$ faisant de $(X, E, X \times X \to E)$ un espace affine : C'est $E = \{0\}$ et $X \times X \to E$ l'unique application entre ensembles ayant un seul élément.

– Soit E un espace vectoriel ; alors le triplet $(E, E, E \times E \to E, (u, v) \mapsto v - u)$ est un espace affine de direction E qu'on appelle structure affine canonique sur E ou espace affine sous-jacent à E.

A l'application $X \times X \to \overrightarrow{X}$ on associe l'application $X \times \overrightarrow{X} \to X$, qui à un couple (M, u) associe l'unique élément N de X tel que $\overrightarrow{MN} = u$. On note cet élément $M + u$. L'application $X \times \overrightarrow{X} \to X$ vérifie alors les axiomes de ce qu'on appelle une action (à droite) du groupe $\overrightarrow{X}$ sur X.

4.2. Applications affines

Rappel : Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour notre propos). Une application d'ensembles $\varphi : E \to F$ est linéaire si on a

– $\forall u, v \in E, \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,

– $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Proposition. Soient E, F deux ($\mathbb{R}$-) espaces vectoriels de même dimension finie et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On a les équivalences :

φ est bijective $\Leftrightarrow$ φ est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ φ est surjective $\Leftrightarrow$ $\exists g : F \to E,\ g\varphi = \mathrm{Id}_E$ $\Leftrightarrow$ $\exists g : F \to E,\ \varphi g = \mathrm{Id}_F$.

Définition. Soient X, Y deux espaces affines sur le même corps ($\mathbb{R}$ pour ce cours) avec X non vide. On dit qu'une application d'ensembles $f : X \to Y$ est affine s'il existe une application linéaire $\varphi : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$ telle que pour tous $M, N \in X$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$. Si φ existe, elle est unique et on l'appelle la partie linéaire de f.

Exemple. Soit X un espace affine (non vide) et u un vecteur de $\overrightarrow{X}$. L'application $X \to X$, $M \mapsto M + u$ est une application affine dont la partie linéaire est l'identité. On l'appelle la translation de vecteur u.

Soient X et Y deux espaces affines sur le même corps avec X non vide. On note $\mathrm{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ l'ensemble des applications linéaires de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{Y}$, $\mathcal{A}\mathrm{ff}(X, Y)$ l'ensemble des applications affines de X dans Y et Φ l'application $\mathcal{A}\mathrm{ff}(X, Y) \to \mathrm{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ qui à une application affine associe sa partie linéaire.

Proposition. Avec les notations ci-dessus :

(a) L'application Φ respecte la composition des applications.

(b) Une application $f \in \mathcal{A}\mathrm{ff}(X, Y)$ est bijective si et seulement si sa partie linéaire $\Phi(f)$ est bijective, auquel cas l'application réciproque f^{-1} est affine.

(c) $f \in \mathcal{A}\mathrm{ff}(X, X)$ est une translation si et seulement si $\Phi(f)$ est l'identité.

On note GL(E), respectivement $\mathrm{GA}(X)$, l'ensemble des applications linéaires bijectives d'un espace vectoriel E dans lui-même, respectivement l'ensemble des applications affines bijectives d'un espace affine (non vide) X dans lui même. La proposition ci-dessus montre que la restriction de Φ à $\mathrm{GA}(X)$ est un morphisme de groupes $\mathrm{GA}(X) \to \mathrm{GL}(\overrightarrow{X})$.

4.3. Repères affines

Choix d'une origine

Soit X un espace affine non vide. A tout choix d'un point O de X correspond l'application $X \to \overrightarrow{X}$, $M \mapsto \overrightarrow{OM}$. Cette application est affine, bijective et de partie linéaire l'identité. Elle réalise donc un isomorphisme affine entre X et sa direction $\overrightarrow{X}$. Tout isomorphisme affine de X dans $\overrightarrow{X}$ dont la partie linéaire est l'identité est de cette forme.

Soient $f : X \to Y$ une application affine de partie linéaire φ et O, O' deux points de X. L'application f s'écrit $M \mapsto f(O) + \varphi(\overrightarrow{OM}) = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OO'}) + \varphi(\overrightarrow{O'M})$ et réciproquement tout application de cette forme est affine. En particulier l'ensemble des applications affines $f : X \to X$ telles que $f(O) = O$ s'identifie via Φ à $\mathrm{L}(\overrightarrow{X})$.

Repères cartésiens, repères affines