Repères cartésiens, repères affines

Soit X un espace affine de dimension n. On appelle repère cartésien de X un $(n+1)$-uplet $(O, e_1, \ldots, e_n)$ où O est un point de X et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{X}$.

Exemple. La famille formée du vecteur nul et de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est un repère cartésien de l'espace affine sous-jacent à $\mathbb{R}^n$, qu'on appelle repère cartésien canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout point $M \in X$ il existe une unique famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de réels telle que $\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. On appelle (x_i) la famille des coordonnées de M dans le repère cartésien $(O, e_1, \ldots, e_n)$. L'application $\mathbb{R}^n \to X$, $(x_i) \mapsto O + \sum_i x_i e_i$ est un isomorphisme affine entre l'espace affine sous-jacent à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et X.

On appelle repère affine de X une famille $(A_0, \ldots, A_n)$ de points de X tel que $(A_0, \overrightarrow{A_0 A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0, A_n})$ soit un repère cartésien de X.

Observons que si $(O, e_1, \ldots, e_n)$ est un repère cartésien de X alors la famille $(O, O + e_1, \ldots, O + e_n)$ est un repère affine de X. Il y a donc équivalence entre la donnée d'un repère cartésien et celle d'un repère affine.

Propriété universelle des repères affines

Proposition. Soient X un espace affine muni d'un repère affine $(A_0, \ldots, A_n)$, Y un espace affine sur le même corps de base et $(B_0, \ldots, B_n)$ une famille de $n+1$ points de Y. Alors il existe une et une seule application affine $f : X \to Y$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i.

Compléments : applications affines et sous-espaces affines

La définition d'un sous-espace affine d'un espace affine est la copie de celle de sous-espace affine d'un espace vectoriel :

Définition. Une partie F d'un espace affine X est un sous-espace affine si et seulement si pour tout point M de F, l'ensemble $\{\overrightarrow{MN}, N \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{X}$.

Si F est un sous-espace affine non vide de X, le sous-espace vectoriel $\{\overrightarrow{MN}, N \in F\}$ ne dépend pas de $M \in F$ et coïncide avec le sous-ensemble $\{\overrightarrow{MN}, M, N \in F\}$ de $\overrightarrow{X}$. L'application $F \times F \to \{\overrightarrow{AB}, A, B \in F\}$, $(M, N) \mapsto \overrightarrow{MN}$ fait de F un espace affine de direction $\{\overrightarrow{AB}, A, B \in F\}$.

Tout sous-espace affine non vide de X s'écrit $O + \overrightarrow{F}$ pour O un point de X et $\overrightarrow{F}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{X}$.

Proposition. Soit $f : X \to Y$ une application affine de partie linéaire φ

(a) L'image par f d'un sous-espace affine F de X est un sous-espace affine de Y de direction $\varphi(\overrightarrow{F})$.

(b) L'image réciproque par f d'un sous-espace affine G de Y (c'est à dire l'ensemble $\{x \in X, f(x) \in G\}$) est soit vide soit un sous-espace affine de direction $\varphi^{-1}(\overrightarrow{G}) = \{u \in \overrightarrow{X}, \varphi(u) \in \overrightarrow{G}\}$.

4.4. Retour sur les barycentres

Soit X un espace affine et $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ un système de n points pondérés de X. On adapte la définition du barycentre du système au cadre affine en considérant l'application $\varphi : X \to \overrightarrow{X}$, $M \mapsto \sum_i \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$. On a $\varphi(M') = \varphi(M) + (\sum_i \alpha_i)\overrightarrow{M'M}$ de sorte que φ est une application affine dont la partie linéaire est l'homothétie vectoriel sur $\overrightarrow{X}$ de rapport $-\sum_i \alpha_i$.

Si $\sum_i \alpha_i$ est nul, l'application φ est constante. Sinon φ est bijective et il existe un unique point G tel que $\varphi(G) = 0$, qu'on appelle le barycentre du système (A_i, α_i).

Coordonnées barycentriques

Soient X un espace affine (non vide) de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de X.

Proposition. Pour tout point M de X il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tel que $\sum_i \alpha_i = 1$ et M est barycentre du système (A_i, α_i).

Preuve : On a l'égalité $\alpha_0\overrightarrow{MA_0} + \sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MA_0} + \sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{A_0A_i}$ donc on a équivalence entre $\alpha_0\overrightarrow{MA_0} + \sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{MA_i} = 0$ et $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{A_0A_i}$. Or cette dernière écriture existe et est unique puisque $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de $\overrightarrow{X}$.

Remarque : on sait que si M est barycentre du système (A_i, α_i) alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul, M est barycentre du système $(A_i, \alpha\alpha_i)$. Autrement dit le $(n+1)$-uplet (α_i) est déterminé à un facteur non nul près. La condition $\sum_i \alpha_i = 1$ est une normalisation : elle supprime cette indétermination.

Terminologie. On appelle coordonnées barycentriques d'un point M dans le repère affine (A_i) tout $(n+1)$-uplet (α_i) tel que M soit le barycentre du système (A_i, α_i). On appelle coordonnée barycentrique normalisée l'unique $(n+1)$-uplet (α_i) vérifiant de plus $\sum_i \alpha_i = 1$.

Nous donnons ci-dessous un énoncé plus précis expliquant le caractère affine des coordonnées barycentriques normalisées dans un repère affine.

Dans $\mathbb{K}^{n+1}$ l'ensemble, disons $\overrightarrow{H}$ des $(n+1)$-uplets $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ tels que $\sum_i \alpha_i = 0$ est un hyperplan vectoriel : c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $(\alpha_i) \mapsto \sum_i \alpha_i$. L'ensemble H des $(n+1)$-uplets (α_i) tel que $\sum_i \alpha_i = 1$ est donc un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{H}$ (un hyperplan affine) : il s'écrit $(1, 0, \ldots, 0) + \overrightarrow{H}$.

Proposition. Soient $A_0, \ldots, A_n$ $(n+1)$ points d'un espace affine X sur un corps $\mathbb{K}$.

(a) L'application $\Psi_{(A_i)} : H \to X$ qui à un $(n+1)$-uplet (α_i) associe le barycentre du système (A_i, α_i) est une application affine.

(b) Si $(A_0, \ldots, A_n)$ est un repère affine de X alors $\Psi_{(A_i)}$ est bijective ; autrement dit c'est un isomorphisme affine de l'hyperplan affine H de $\mathbb{K}^{n+1}$ dans X.

La réciproque de (b) est également vrai : si $\Psi_{(A_i)}$ est bijective alors (A_i) est un repère affine de X.

Barycentres et applications affines

Proposition. Soient X, Y deux espaces affines sur le même corps et $f : X \to Y$ une application d'ensembles. f est affine si et seulement si pour tout entier n et pour tout système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $\sum_i \alpha_i \neq 0$, l'image par f du barycentre du système est le barycentre du système $(f(A_i), \alpha_i)$.

Preuve : Si f est affine de partie linéaire φ alors on a pour tout point M et pour tout système de point pondéré (A_i, α_i) $\sum_i \alpha_i\overrightarrow{f(M)f(A_i)} = \varphi(\sum_i \overrightarrow{MA_i})$ donc si M est barycentre du système (A_i, α_i), $f(M)$ est barycentre du système $(f(A_i), \alpha_i)$.

Inversement supposons X de dimension finie et soit $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de X. Si f préserve les barycentres alors f est la composée $\Psi_{(f(A_i))} \circ \Psi_{(A_i)}^{-1}$, donc la composée de deux applications affines donc f est affine.

4.5. Applications affines entre deux droites

On commence par la

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension 1. Une application linéaire $E \to F$ est nulle ou bijective.

Rappelons qu'une droite affine est un espace affine sur un corps $\mathbb{K}$ non vide dont la direction est de dimension 1.

Soient D une droite et u un vecteur directeur de D, c'est à dire un élément non nul de la direction $\overrightarrow{D}$ de D. On définit relativement à u une mesure algébrique sur D : c'est l'application $D \times D \to \mathbb{K}$ qui à un couple de points (M, N) associe l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{MN} = \lambda \cdot u$. Si A, B, C sont trois points de D avec A distinct de C alors le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ ne dépend pas du choix de u : il est caractérisé par $\overrightarrow{AB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Parmis les applications affines entre deux droites il y a bien sûr les applications constantes. La proposition suivante caractérisent les autres.

Proposition. Soient D, D' deux droites affines sur un même corps $\mathbb{K}$ et $f : D \to D'$ une application d'ensembles ; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est affine et non constante.

(ii) f est affine et bijective (donc un isomorphisme affine entre D et D').

(iii) f est injective et pour tout triplet (A, B, C) de points de D avec A distinct de C on a

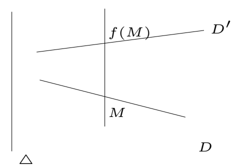
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{f(A)f(B)}}{\overline{f(A)f(C)}} .$$

(On dit alors que f préserve le rapport des mesures algébriques.)

Illustration avec le théorème de Thalès

Soient D et D' deux droites du plan affine et soit $\triangle$ une droite sécante à D et sécante à D'. On considère l'application $f : D \to D'$ qui à un point M de D associe le point intersection de D' avec la parallèle à $\triangle$ passant par M.

Montrer que f est bien définie et qu'elle est injective. Montrer en utilisant le théorème de Thalès et la proposition ci-dessus que f est affine.



4.6. Homothéties-translations

On considère dans ce paragraphe les applications $X \to X$ où X est un espace affine sur un corps $\mathbb{K}$.

Proposition. Soit φ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\varphi = k\mathrm{Id}$ pour un scalaire $k \in \mathbb{K}$

(ii) Pour tout élément $u \in E$, $\varphi(u)$ est colinéaire à u.

Pour $k \neq 0$ on appelle homothétie vectoriel de rapport k l'application $k\mathrm{Id}$ de E dans E.

Exercice. Montrer qu'un endomorphisme $\varphi \in \mathrm{L}(E)$ est l'application nulle ou une homothétie vectoriel si et seulement si pour tout $\psi \in \mathrm{L}(E)$ on a $\varphi\psi = \psi\varphi$

Définition. Soient A un point de X et $k \in \mathbb{K}$ un scalaire non nul. On appelle homothétie de centre A et de rapport k l'application $X \to X$, $M \mapsto A + k\overrightarrow{AM}$. C'est donc une application affine de partie linéaire $k\mathrm{Id}$, donc une bijection affine puisque k est non nul.

Proposition. Soit $f : X \to X$ une application affine. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une homothétie de rapport $k \neq 1$.

(ii) La partie linéaire de f est une homothétie vectorielle de rapport $k \neq 1$.

Pour Démontrer l'implication (ii)⇒(i) on montre l'existence d'un point fixe A pour f, car alors $f(A+u) = f(A) + \varphi(u) = A + ku$. L'existence (et l'unicité) d'un point fixe est donné par la proposition suivante.

Proposition. Soient X un espace affine (non vide) de dimension finie et $f : X \to X$ une application affine de partie linéaire φ.

(a) L'ensemble des points fixes de f, $\{M \in X, f(M) = M\}$, est un sous-espace affine de X qui est soit vide soit de direction le noyau de $\varphi - \mathrm{Id}$.

(b) Si $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) = \{0\}$ alors f admet un et un seul point fixe.

Preuve du point (b) : Soit O un point de X. On cherche M tel que $f(M) = M$. Cela se traduit par $\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{OM}$ donc par $\overrightarrow{Of(O)} + \varphi(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} = 0$. Or $\varphi - \mathrm{Id}$ est injective par hypothèse et $\overrightarrow{X}$ est de dimension finie, donc $\varphi - \mathrm{Id}$ est bijective et il existe un unique vecteur u tel que $(\varphi - \mathrm{Id})(u) = \overrightarrow{f(O)O}$. Le point $M = O + u$ est alors l'unique point fixe de f.

L'unicité de M dans le point (b) esst cohérente avec le point (a) : un sous-espace affine non vide dont la direction est $\{0\}$ est réduit à un point.

Exemple. Si f est une translation de vecteur u le noyau de $\varphi - \mathrm{Id}$ est $\overrightarrow{X}$ entier. L'ensemble de ses points fixes de f est vide si $u \neq 0$, l'espace X entier si $u = 0$.

On sait que les applications affines dont la partie linéaire est l'identité sont les translations associée à un vecteur de $\overrightarrow{X}$. On obtient :

Proposition. Soit $f : X \to X$ une application affine. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une homothétie ou une translation.

(ii) La partie linéaire de f est une homothétie vectorielle.

(iii) Pour toute droite D de X, $f(D)$ est une droite parallèle à D.

Expliquons la troisième condition : Soient D une droite de X, A un point de D et notons φ la partie linéaire de f. L'image par f de D est le sous-espace affine $f(A) + \varphi(\overrightarrow{D})$ de direction $\varphi(\overrightarrow{D})$. C'est donc un point ou une droite suivant que la restriction de φ à $\overrightarrow{D}$ est nulle ou pas. La condition (iii) se traduit par :

(iv) Pour toute droite vectorielle $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{X}$ on a $\varphi(\overrightarrow{D}) = \overrightarrow{D}$.

Or φ est une homothétie vectorielle si et seulement si (iv) est vérifiée.

Comme l'application $\Phi : \mathcal{A}\mathrm{ff}(X) \to \mathrm{L}(\overrightarrow{X})$, qui à une application affine associe sa partie linéaire, respecte la composition, la proposition ci-dessus montre que la composée de deux homothétie-translations est une homothétie-translation.

Proposition. Le sous-ensemble de $\mathcal{A}\mathrm{ff}(X)$ formé des homothéties et des translations est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(X)$, image réciproque par Φ du sous-groupe de $\mathrm{GL}(\overrightarrow{X})$ formé des homothéties vectorielles.

Exercice : Construire géométriquement le centre de la composée de deux homothéties lorsqu'il existe.

5. Sous-espaces affines, hyperplans et équations

6. Ensembles convexes

Rappelons que si A et B sont deux points d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, le segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de poids positifs.

Définition. Une partie F de E est dite convexe si pour toute paire de points A, B dans F le segment $[A, B]$ est inclus dans F.

Exemple. Soient E un espace vectoriel euclidien, A un point de E et r un réel positif, alors l'ensemble $B(A, r) = \{M \in E, AM \leq r\}$ (la boule de centre A et de rayon r) est une partie convexe de E. (Exercice !)

Soit F une partie de E. L'intersection de toutes les parties convexes contenant F est une partie convexe et c'est la plus petite contenant F. On l'appelle l'enveloppe convexe de F.

On appelle polygône l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points d'un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.