

6. Compléments : autres exemples d'applications affines

Soient X un espace affine (non vide), F un sous-espace affine non vide de X et \vec{G} un supplémentaire de \vec{F} dans \vec{X} . On note $p_{\vec{F}}$, respectivement $p_{\vec{G}}$, la projection de \vec{X} sur \vec{F} , respectivement sur \vec{G} , résultant de l'écriture $\vec{X} = \vec{F} \oplus \vec{G}$. Soit enfin A un point de F .

On appelle projection sur F parallèlement à \vec{G} l'application affine

$$p : M \mapsto A + p_{\vec{F}}(\vec{AM}) .$$

Propriétés : p ne dépend pas du choix de $A \in F$; F est l'ensemble des points fixes de p ; la composée $p \circ p$ est p .

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à \vec{G} l'application affine

$$s : M \mapsto A + p_{\vec{F}}(\vec{AM}) - p_{\vec{G}}(\vec{AM}) .$$

Propriétés : s ne dépend pas du choix de $A \in F$; F est l'ensemble des points fixes de s ; la composée $s \circ s$ est l'identité.

On appelle affinité de base F parallèlement à \vec{G} et de rapport $a \in \mathbb{K}$ l'application affine $M \mapsto A + p_{\vec{F}}(\vec{AM}) + ap_{\vec{G}}(\vec{AM})$. C'est la projection si $a = 0$, la symétrie si $a = -1$, l'identité si $a = 1$.

Cas particulier : Soient X est un espace affine euclidien (de dimension finie) et F est un sous-espace affine non vide de X . On appelle projection orthogonale sur F et on note p_F la projection sur F parallèlement à \vec{F}^\perp (l'orthogonal de \vec{F} dans \vec{X} pour le produit scalaire). On appelle symétrie orthogonale par rapport à F et on note s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à \vec{F}^\perp .

PROPOSITION. Soient F un sous-espace affine non vide d'un espace affine euclidien de dimension finie et M un point de X ; alors on a pour tout point $N \in F$ l'inégalité $MN \geq Mp_F(M)$ avec égalité si et seulement si $N = p_F(M)$.

7. Sous-espaces affines, hyperplans et équations

Rappel d'algèbre linéaire

Soit E un espace vectoriel. On appelle hyperplan vectoriel de E un sous-espace vectoriel H tel que $\dim(E/H) = 1$. Si E est de dimension finie n , un hyperplan vectoriel est donc un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

PROPOSITION. Soit H une partie d'un espace vectoriel E ; alors H est un hyperplan vectoriel si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Si f est une telle forme linéaire, $f(x) = 0$ est une équation (linéaire) de H . Observons que pour g une autre forme linéaire on a $H = \text{Ker}(g)$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}, g = \lambda f$. (Cf cours sur la dualité.)

Si E est de dimension finie n et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E alors H s'écrit

$$H = \left\{ x = \sum_i x_i e_i \in E, \sum_i x_i f(e_i) = 0 \right\} .$$

Inversement si $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'éléments de \mathbb{K} alors il existe une unique forme linéaire f vérifiant $f(e_i) = a_i$, auquel cas l'équation $\sum_i a_i x_i = 0$ est l'équation dans la base (e_i) d'un hyperplan vectoriel de E .

Si E est euclidien (et de dimension finie) alors toute forme linéaire f coïncide avec l'application $x \mapsto (n|x)$ pour un unique vecteur $n \in E$: Si (e_i) est une base orthonormée de E alors les coordonnées de n dans cette base sont les $f(e_i)$. f est non nulle si et seulement si n est non nul auquel cas on dit que n est un vecteur normal de $H = \text{Ker}(f)$. Comme f , n n'est déterminé par H qu'à un scalaire non nul près.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour F un sous-espace vect. de E on note F° l'ensemble des formes linéaires sur E dont la restriction à F est nulle (c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel dual E^*). F° est de dimension $\dim(E) - \dim(F)$. Si E est muni d'un produit scalaire, on dispose également de F^\perp , le sous-espace vectoriel de E formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F . La restriction de l'application $E \rightarrow E^*$, $n \mapsto (n|\cdot)$ à F^\perp est un isomorphisme de F^\perp sur F° .

PROPOSITION. Si f_1, \dots, f_k est une base de F^\perp alors F est l'intersection des noyaux des f_i .

On dit que $f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0$ est un système d'équations linéaires de F .

Hyperplans affines

DÉFINITION. On appelle hyperplan affine d'un espace affine X un sous-espace affine non vide dont la direction est un hyperplan vectoriel de \vec{X} .

Si X est un espace affine de dimension n , un hyperplan affine est donc un sous-espace affine non vide de X de dimension $n - 1$.

Soient H un hyperplan affine de X et A un point de H . H s'écrit $A + \vec{H}$. Si $f(x) = 0$ (f forme linéaire sur \vec{X}) est une équation de \vec{H} alors H s'écrit $\{M \in X, f(\overrightarrow{AM}) = 0\}$.

Si (O, e_1, \dots, e_n) est un repère cartésien de X , on peut écrire $f(\overrightarrow{AM}) = f(\overrightarrow{OM}) - f(\overrightarrow{OA})$ puis $H = \{M \in X \text{ de coordonnées } (x_i), \sum x_i f(e_i) = f(\overrightarrow{OA})\}$. L'équation $\sum x_i f(e_i) = f(\overrightarrow{OA})$ s'appelle une équation cartésienne de H dans le repère (O, e_1, \dots, e_n) .

Inversement soit (a_i) un n -uplet d'éléments de \mathbb{K} non tous nuls et $a \in \mathbb{K}$. L'ensemble $\{M(x_i), \sum a_i x_i = a\}$ est un hyperplan affine dont la direction est d'équation $\sum a_i x_i = 0$ dans la base (e_i) et qui passe par le point $(0, \dots, 0, \frac{a}{a_i}, 0, \dots, 0)$ si $a_i \neq 0$.

Supposons maintenant X euclidien. Tout hyperplan affine H de X s'écrit $\{M \in X, (\vec{n}|\overrightarrow{AM}) = 0\}$ pour un point A de X et un vecteur non nul \vec{n} de \vec{X} . Le vecteur \vec{n} s'appelle vecteur normal de H (\vec{n} est déterminé par H à un scalaire non nul près). Si $\sum a_i x_i = a$ est une équation de H dans un repère orthonormé (un repère formé d'un point et d'une base orthonormée de \vec{X}), alors (a_i) est la famille des coordonnées d'un vecteur normal à H dans la base orthonormée associée.

Systèmes d'équations d'un sous-espace affine

Soient X un espace affine non vide de dimension finie n , $F \subset X$ un sous-espace affine non vide de direction \vec{F} , A un point de F et f_1, \dots, f_k une base de \vec{F}° . Alors F coïncide avec l'ensemble $\{M \in X, f_1(\overrightarrow{AM}) = \dots = f_k(\overrightarrow{AM}) = 0\}$. On dit que $f_1(\overrightarrow{AM}) = 0, \dots, f_k(\overrightarrow{AM}) = 0$ est un système d'équations affines de F . On obtient un système d'équations cartésiennes lorsqu'on exprime les $f_i(\overrightarrow{AM})$ dans un repère cartésien de X .

Inversement on a la :

PROPOSITION. Soit X un espace affine (non vide) de dimension n muni d'un repère cartésien. Soient $(a_{1,i}), \dots, (a_{k,i})$ une famille **libre** de vecteurs de \mathbb{K}^n et a_1, \dots, a_k une famille d'éléments de \mathbb{K} . Alors l'ensemble des points de coordonnées (x_i) vérifiant

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = a_1 \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = a_k \end{cases}$$

est un sous-espace affine de X non vide et de dimension $n - k$.

Preuve : par le pivot de Gauss.

8. Isométries d'un espace affine euclidien

8.1. DÉFINITION. Un espace affine euclidien X est un \mathbb{R} -espace affine non vide de dimension finie dont la direction \vec{X} est munie d'un produit scalaire.

On obtient une distance sur X : $d(M, N) = \sqrt{(\overrightarrow{MN} | \overrightarrow{MN})}$, aussi noté MN .

La donnée d'un produit scalaire sur \vec{X} n'a rien de mystérieux : si (e_1, \dots, e_n) est une base de \vec{X} il existe un et un seul produit scalaire sur \vec{X} pour lequel (e_i) est une base orthonormée : c'est l'application qui a deux vecteurs de coordonnées respectives (x_i) et (y_i) associe le réel $\sum_i x_i y_i$.

DÉFINITION. On appelle isométrie d'un espace affine euclidien X une application d'ensembles $f : X \rightarrow X$ vérifiant

$$\forall M, N \in X, d(f(M), f(N)) = d(M, N) .$$

Exemples.

- Soit $\vec{u} \in \vec{X}$. La translation de vecteur \vec{u} est une isométrie de X : on a pour tous M, N $\overrightarrow{t_{\vec{u}} M t_{\vec{u}} N} = \overrightarrow{MN}$ donc les normes sont égales.
- Soit F un sous-espace affine non vide de X , alors la symétrie orthogonal par rapport à F , s_F , est une isométrie. Lorsque F est un hyperplan on parle de symétrie hyperplane ou réflexion (Cf image dans un miroir dans l'espace ambiant de dimension 3). Lorsque F est un point on a affaire à une symétrie centrale (homothétie de rapport -1).

PROPOSITION 8.1. Soit X un espace affine euclidien de dimension n , alors toute isométrie s'écrit comme la composée d'au plus $n + 1$ symétries hyperplanes.

COROLLAIRE. Toute isométrie d'un espace affine euclidien est une bijection affine.

Pour démontrer la proposition on utilise la notion d'hyperplan médiateur :

Soient A, B deux points de X . L'ensemble $\{M \in X, MA = MB\}$ est X si $A = B$, l'hyperplan passant par le milieu du segment $[A, B]$ et orthogonale à (AB) si $A \neq B$. Notons le H ; on a $s_H(A) = B$.

On montre ensuite les deux points suivants pour f une isométrie :

- (1) Si (A_0, \dots, A_n) est un repère affine de X formé de points fixe de f alors f est l'identité.
- (2) Quitte à composer f à gauche par au plus $n + 1$ symétries hyperplanes, on peut se ramener à une isométrie admettant $n + 1$ points fixes affinement indépendants.

(1) vient de ce que si M est un point de X on a $d(M, A_i) = d(f(M), A_i)$ car f conserve les distances et A_i est point fixe. Donc si $M \neq f(M)$, chaque point A_i est dans l'hyperplan médiateur du segment $[M, f(M)]$ donc également le sous-espace affine engendré par les A_i , or celui-ci est X entier, il ne peut être inclus dans un hyperplan de X .

(2) se démontre par une récurrence finie : si A_0, \dots, A_k points fixes affinement indépendants d'une isométrie f_k ont été construits, on considère un point A_{k+1} dans X privé du sous-espace affine engendré par A_0, \dots, A_k . Un tel point A_{k+1} existe pourvu que $k < n$. Si $f_k(A_{k+1}) = A_{k+1}$, on a construit $k + 2$ points fixes affinement indépendants de f_k . Si $f_k(A_{k+1}) \neq A_{k+1}$ on note H l'hyperplan médiateur du segment $[A_{k+1}, f_k(A_{k+1})]$ et on pose $f_{k+1} = s_H \circ f_k$. On a vu plus haut que les A_i sont dans H pour $i \leq k$ donc sont fixes par s_H . Alors f_{k+1} est une isométrie et $f_{k+1}(A_i) = A_i$ pour $i \leq k + 1$.

8.2. Isométrie de la droite affine euclidienne

La proposition 8.1 nous dit qu'une isométrie f de la droite affine s'écrit comme la composée de 0 symétrie centrale (si f est l'identité, auquel cas le sous-espace des points fixes est la droite entière) ou d'une symétrie centrale (auquel cas le sous-espace des points fixes est formé du seul centre de la symétrie) ou de deux symétries centrales.

PROPOSITION. Soient A et B deux points d'une droite affine et s_A, s_B les symétries centrales associées. La composée $s_B \circ s_A$ coïncide avec la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

On observe qu'une translation est de partie linéaire l'identité et qu'une symétrie centrale est de partie linéaire $-\text{Id}$. Comme l'application qui a une application affine associe sa partie linéaire respecte la composition on en déduit que la composée d'un nombre impair de symétries centrales est une symétrie centrale. La composée d'un nombre pair de symétries centrales est une composée de translations donc est une translation.

EXERCICE. Soient A, B, C trois points d'une droite affine. Déterminer le centre de la symétrie $s_A \circ s_B \circ s_C$ en fonction de A, B, C . Même chose pour la composée de 5 symétries centrales.