8.3. Isométrie du plan affine euclidien

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Un hyperplan de $\mathcal{P}$ est une droite de $\mathcal{P}$; la symétrie orthogonale par rapport à une droite D de $\mathcal{P}$ est appelée symétrie axiale d'axe D et notée s_D.

La proposition 8.1 nous dit qu'une isométrie f de $\mathcal{P}$ s'écrit de l'une des façons suivantes :

- la composée de 0 symétrie axiale – f est alors l'application identité et l'ensemble des points fixes de f est $\mathcal{P}$ entier,
- $f = s_D$ pour D une droite de $\mathcal{P}$ – l'ensemble des points fixes de f est alors D,
- $f = s_D \circ s_{D'}$ pour D et D' deux droites de $\mathcal{P}$ – voir ci-dessous,
- $f = s_D \circ s_{D'} \circ s_{D''}$ – voir ci-dessous.

Si $D = D'$, $s_D \circ_{D'}$ est l'identité.

Si D et D' sont deux droites parallèles et distinctes alors $s_D \circ s_{D'}$ est une translation de vecteur non nul orthogonal à D (et à D') (voir l'exercice 4 de la feuille de TD 4) ; l'ensemble des points fixes de $s_D \circ s_{D'}$ est vide.

Si D et D' sont deux droites sécantes en un point O alors $s_D \circ s_{D'}$ est une rotation de centre O d'angle non nul : voir la section suivante et les exercices 2 et 4 de la feuille de TD 4. L'ensemble des points fixes est $\{O\}$.

$s_D \circ s_{D'} \circ s_{D''}$ est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation : voir l'exercice 4 de la feuille de TD 4. L'ensemble des points fixes est l'ensemble vide ou une droite.

9. Rotations et angles du plan affine euclidien

9.1. Rappel : Soient X un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{X}$ et $f : X \to X$ une application d'ensembles. f est une isométrie si et seulement si pour tous $M, N \in X$, on a $\mathrm{d}(f(M), f(N)) = \mathrm{d}(M, N)$.

Proposition. Soit $f : X \to X$ une application d'ensembles. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie.

(ii) f s'écrit comme la composée d'un nombre fini de symétries hyperplanes.

(iii) f est affine et sa partie linéaire est un endomorphisme orthogonal de $\overrightarrow{X}$.

9.2. Etude de la partie linéaire d'une isométrie plane

Rappel Soit $\varphi : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{X}$ une application linéaire (ou endomorphisme). φ est orthogonal si et seulement si pour tous $x, y \in \overrightarrow{X}$ on a $(\varphi(x)|\varphi(y)) = (x|y)$.

Proposition. Soit $\varphi : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{X}$ un endomorphisme. Les conditions suivantes sont équialentes :

(i) φ est un endomorphisme orthogonal.

(ii) Pour toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\overrightarrow{X}$, la famille $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{X}$.

(iii) Il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\overrightarrow{X}$ telle que la famille $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ soit une base orthonormée de $\overrightarrow{X}$.

(iv) La matrice M de φ dans une base orthonormée vérifie ${}^tMM = \mathrm{I}$.

On considère $\mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire canonique. La famille de vecteurs $((1,0),(0,1))$ est une base orthonormée (BON) de $\mathbb{R}^2$. On l'appelle la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base canonique. φ est orthogonal si et seulement si

- $a^2 + b^2 = 1$ (c'est la traduction de $\|\varphi(1,0)\|^2 = 1$), et
- $c^2 + d^2 = 1$ (c'est la traduction de $\|\varphi(0,1)\|^2 = 1$), et
- $ac + bd = 0$ (c'est la traduction de $\varphi(1,0)$ est orthogonal à $\varphi(0,1)$).

Supposons ces conditions vérifiées. La condition $a^2 + b^2$ entraine l'existence d'un réel α, unique à un multiple entier de 2π près, tel que $(a,b) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. D'autre part on sait que l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par (a,b) ($(a,b) \neq (0,0)$) est la droite vectorielle engendrée par $(-b,a)$; donc (c,d) s'écrit $(-\lambda b, \lambda a)$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme de plus $c^2 + d^2 = 1$ on a $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$, c'est à dire deux possibilité pour la matrice de φ : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ de déterminant 1 ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ de déterminant -1.

Dans le second cas on reconnaît la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2})$ (voir l'exercice 2 de la feuille de TD 4).

Dans le premier cas on dit que φ est la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'angle α (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$).

Proposition. L'application $\Phi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

L'image de Φ est notée $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ dans la littérature). Comme $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif, on obtient que l'image de Φ, $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$, est commutatif (alors que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est loin de l'être).

La périodicité des fonctions cos et sin nous dit que l'homomorphisme Φ est de noyau $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. On obtient donc un isomorphisme de groupes $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$.

Lien avec le corps $\mathbb{C}$

L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(a,b) \mapsto a + ib$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels d'inverse $z \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$. La base canonique $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ s'identifie via cet isomorphisme à la famille $(1,i)$. Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ correspond via cet isomorphisme à l'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(z,z') \mapsto \frac{1}{2}(z\bar{z}' + \bar{z}z')$. La norme associée est $z \mapsto |z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ qu'on écrit $z_0 = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. L'application $\varphi_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z_0 z$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La matrice de φ_{z_0} dans la base canonique est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. On reconnaît la matrice d'une rotation vectorielle si $a^2 + b^2 = 1$ c'est à dire si $|z_0| = 1$.

Notons U l'ensemble des nombres complexes de module 1 ; c'est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. On sait que l'application $\alpha \mapsto e^{i\alpha}$ est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ d'image U et de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

On a donc deux homomorphismes : $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to U$, $[\alpha] \mapsto e^{i\alpha}$ et $U \to \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, $z \mapsto \mathrm{mat}(\varphi_z)$ dont la composée coïncide avec l'application $[\alpha] \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Ce sont tous des isomorphismes.

Exercice.

- Soit $a \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module 1. Montrer que la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathbb{C}$ par rapport à la droite $\{\lambda a, \lambda \in \mathbb{R}\}$ s'écrit $z \mapsto a^2\bar{z}$.
- Pour $a \in \mathbb{C}$ quelconque montrer que l'application $a \mapsto az$, respectivement $z \mapsto a\bar{z}$, est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une rotation de $\mathbb{R}^2$, respectivement d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie orthogonale.

Rotations vectorielles du plan vectoriel euclidien
Soit $\overrightarrow{P}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et soit (e_1, e_2) une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Définition. On appelle rotation vectorielle de $\overrightarrow{P}$ d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ relativement à la BON (e_1, e_2) l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2). On la note r_α.

La discussion qui précède montre qu'une rotation vectorielle de $\overrightarrow{P}$ est exactement un endomorphisme orthogonal de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de déterminant 1. L'angle α de la rotation dépend de la BON (e_1, e_2) choisie (voir par exemple l'exercice 3 de la feuille de TD 4). En fait il ne dépend que de l'*orientation* de la BON (e_1, e_2).

Exercice. Montrer que l'angle α de r_α est changé en $-\alpha$ si on change (e_1, e_2) en (e_2, e_1).

9.3. Rotations dans le plan affine euclidien

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On fixe une BON (e_1, e_2) de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Définition. On appelle rotation de centre $O \in \mathcal{P}$ et d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ relativement à la BON (e_1, e_2) l'application $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $M \mapsto O + r_\alpha(\overrightarrow{OM})$, où r_α est la rotation vectorielle de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ d'angle α relativement à la BON (e_1, e_2). On la note $r_{O,\alpha}$.

Proposition. Soient D et D' deux droites de $\mathcal{P}$ sécantes en un point O. Alors l'application composée $s_D \circ s_{D'}$ est une rotation de centre O.

Preuve : $s_D \circ s_{D'}$ est une isométrie et sa partie linéaire est de déterminant le produit des déterminants de s_D et de $s_{D'}$, c'est à dire $-1 \cdot -1 = 1$. Donc la partie linéaire de $s_D \circ s_{D'}$ est une rotation vectorielle.

On peut aussi se ramener à l'exercice 2 de la feuille de TD 4 en choisissant un repère orthonormé de $\mathcal{P}$ d'origine O et en exprimant s_D et $s_{D'}$ en coordonnées.

Composée de deux rotations : voir la feuille de TD 4 exer. 5.

9.4. Angle orienté de deux vecteurs