24 novembre 2004

Examen partiel

Durée : 2 heures

Le corps des scalaires (pour les espaces affines) est le corps des réels $\mathbb{R}$.

Questions de cours.

(2pts) **1.** Soient X un espace affine non vide de dimension finie et $f : X \to X$ une application affine de partie linéaire φ. Montrer que si 1 n'est pas valeur propre de φ alors f admet exactement un point fixe (un point M tel que $f(M) = M$).

(1pt) **2.** Montrer que la composée de deux applications affines est affine.

Exercices.

(8pts) **3.** Soit X un plan affine.

a. Soit $f : X \to X$ une homothétie de centre A de rapport $a \neq 1$. Soient M, N, P trois points non alignés. Montrer que deux au moins des droites $(Mf(M))$, $(Nf(N))$ et $(Pf(P))$ sont bien définies et sont non confondues. Montrer que leur intersection est $\{A\}$.

b. Supposons par exemple $M \neq f(M)$ et $N \notin (Mf(M))$. Montrer que $f(N)$ est l'intersection de la droite (AN) avec la parallèle à (MN) passant par $f(M)$.

c. Soient D et D' deux droites sécantes en un point A. Soient $B \neq C$ deux points de D distincts de A et B', C' deux points de D' distincts de A. On suppose que les droites (BB') et (CC') (bien définies !) sont parallèles. Montrer qu'il existe une unique homothétie de centre A transformant B en C. Quel est son rapport ? Montrer que cette homothétie transforme B' en C'. En déduire que les rapports $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ et $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$ sont égaux.

Montrer inversement que si ces rapports sont égaux alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

d. Soient D, D' et D'' trois droites deux à deux distinctes, concourantes en un point A. Soient $B \neq C$ deux points de D distincts de A, B', C' deux points de D' distincts de A, B'', C'' deux points de D'' distincts de A. On suppose que (BB') est parallèle à (CC') et $(B'B'')$ est parallèle à $(C'C'')$. Montrer que (BB'') est parallèle à (CC'').

(9pts) **4.** On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On rappelle que si E est un espace vectoriel euclidien de dimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E alors l'orthogonal de F est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E. On rappelle également que la distance entre deux sous-espaces affines non vides F, G d'un espace vectoriel euclidien E est définie comme la borne inférieure du sous-ensemble $\{\|\overrightarrow{MN}\|, M \in F, N \in G\}$ de $\mathbb{R}$.

a. Soient P un plan affine de $\mathbb{R}^3$ et A un point de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à P. Montrer qu'une droite affine de $\mathbb{R}^3$ passant par A soit intersecte P en un point, soit lui est parallèle. En déduire l'existence d'un point A_P de P tel que $\overrightarrow{AA_P}$ est orthogonal à P. On appelle A_P le projeté orthogonal de A sur P. Montrer que la distance de A à P est égale à $\|\overrightarrow{AA_P}\|$.

b. Soit D une droite passant par A et parallèle à P. Montrer que lorsque M décrit D le projeté orthogonal M_P de M sur P décrit une droite incluse dans P et parallèle à D. Montrer que la distance de M à P ne dépend pas du choix de $M \in D$. Que peut on dire de la distance entre une droite passant par A et P suivant la position de cette droite par rapport à P ?

.../... ?

Soient (u, v, w) une base de $\mathbb{R}^3$, A un point de $\mathbb{R}^3$, D la droite passant par A de vecteur directeur u et D' la droite passant par $A + w$ de vecteur directeur v.

c. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note M_λ le point $A + w + \lambda v$. Montrer qu'il existe un et un seul plan passant par M_λ et contenant D. On le note P_λ

d. Montrer que lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, P_λ décrit tous les plans contenant D sauf un qu'on notera P_∞. Déterminer la direction de P_∞ en fonction de u, v et w. La distance de D' à P_∞ est elle nulle ? Que peut on en déduire sur la distance de D' à D ?

e. On note D'_{P_∞} la droite formée des projetés orthogonaux des points de D' sur P_∞ (Cf la question b). Montrer que les droites D et D'_{P_∞} sont sécantes en un point N_{P_∞}.

Soit N le point de D' dont N_{P_∞} est le projeté orthogonal sur P. Montrer que pour tout point M de D et pour tout point M' de D' on a $MM' \geq NN_{P_\infty}$. En déduire $\mathrm{d}(D, D') = NN_{P_\infty}$.

f. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul orthogonal à u et à v. Soient M un point de D et M' un point de D'. Montrer que la valeur absolue du produit scalaire $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{n}$ est égale à $\mathrm{d}(D, D') \cdot \|\overrightarrow{n}\|$.

g. Cas concret : On prend $A = (0, 0, 0)$, $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 1)$ et $w = (1, 2, 3)$. Calculer la distance de D à D'.