

M2 Math – Topologie Algébrique

Homologie des complexes simpliciaux¹

(version du 20 février 2009)

1. Complexes simpliciaux finis

Rappel de géométrie affine sur \mathbb{R}

Soient A_0, \dots, A_n $n + 1$ points de \mathbb{R}^N (n et N sont deux entiers quelconques). Le plus petit sous-espace affine de \mathbb{R}^N contenant tous les A_i est l'ensemble des barycentres $\sum_i \lambda_i A_i$, $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ décrivant les $n + 1$ -uplets de réels de somme 1. On le note $\langle A_0, \dots, A_n \rangle$. Les points A_0, \dots, A_n sont affinement indépendants si tout point de $\langle A_0, \dots, A_n \rangle$ s'écrit $\sum_i \lambda_i A_i$ pour un unique $n + 1$ -uplets de réels (λ_i) de somme 1. De façon équivalente A_0, \dots, A_n sont affinement indépendants si et seulement si le sous-espace affine $\langle A_0, \dots, A_n \rangle$ est de dimension n .

Une partie \mathcal{C} de \mathbb{R}^N est convexe si pour tout couple de points A, B de \mathcal{C} le segment $[A, B]$ est dans \mathcal{C} . L'ensemble

$$\{\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1\}$$

est la plus petite partie convexe de \mathbb{R}^N contenant tous les A_i . On la note $C(A_0, \dots, A_n)$ et on l'appelle l'enveloppe convexe des A_i . C'est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^N donc un espace topologique compact pour la topologie induite par celle de \mathbb{R}^N .

Un coin d'une partie convexe \mathcal{C} est un point A de \mathcal{C} vérifiant

$$\forall B, C \in \mathcal{C}, A \in [B, C] \Rightarrow (A = B \text{ ou } A = C).$$

Lemme 1.1 Si les points A_i sont affinement indépendants alors les coins de $C(A_0, \dots, A_n)$ sont exactement les points A_i .

Ex. Qu'en est il si les A_i ne sont pas affinement indépendants ?

Lemme 1.2 Soit $f : \{A_0, \dots, A_n\} \rightarrow \mathbb{R}^{N'}$ une application. Si les points A_0, \dots, A_n sont affinement indépendants alors f s'étend de façon unique en une application affine $\tilde{f} : C(A_0, \dots, A_n) \rightarrow \mathbb{R}^{N'}$ d'image l'enveloppe convexe des $f(A_i)$.

L'application \tilde{f} vérifie $\tilde{f}(\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(A_i)$ et cette formule définit \tilde{f} si l'écriture $\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$ est unique.

Ex. Montrer par un exemple que l'hypothèse "les A_i sont affinement indépendants" est nécessaire.

Complexe simplicial dans \mathbb{R}^N

Déf. On appelle **simplexe** dans \mathbb{R}^N l'enveloppe convexe d'un ensemble fini non vide $\{A_0, \dots, A_n\}$ de points affinement indépendants dans \mathbb{R}^N .

L'entier $n = \dim(\langle A_0, \dots, A_n \rangle)$ est appelé **dimension** du simplexe $C(A_0, \dots, A_n)$.

Les points A_0, \dots, A_n sont déterminés (à permutation près) par le simplexe $C(A_0, \dots, A_n)$ puisque ce sont les coins du simplexe ; on les appelle les **sommets** du simplexe.

On appelle **face** d'un simplexe σ tout simplexe dans \mathbb{R}^N dont les sommets sont des sommets de σ . Les faces de σ sont donc exactement les enveloppes convexes de sous-ensembles de l'ensemble des sommets de σ .

Déf. On appelle **complexe simplicial** (fini) dans \mathbb{R}^N un ensemble fini K de simplexes de \mathbb{R}^N vérifiant :

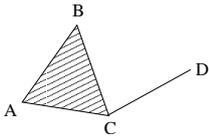
- toute face d'un simplexe de K est un simplexe de K ;
- l'intersection de deux simplexes de K est vide ou une face de chacun des simplexes.

On appelle **sommet** d'un complexe simplicial K tout sommet d'un simplexe de K .

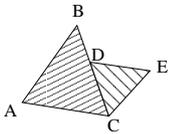
Ex. 1) L'ensemble des faces d'un simplexe dans \mathbb{R}^N est un complexe simplicial.

¹F.X. Dehon, déc 08 – fev 09, dehon@unice.fr

2) L'ensemble formé du simplexe $C(A, B, C)$, du simplexe $C(C, D)$ et de leurs faces (figure ci-dessous) est un complexe simplicial dans \mathbb{R}^2 .



3) L'ensemble formé des simplexes $C(A, B, C)$, $C(D, C, E)$ et de leurs faces (figure ci-dessous) n'est pas un complexe simplicial dans \mathbb{R}^2 : les simplexes $C(B, C)$ et $C(D, C)$ ne s'intersectent pas suivant une face de $C(B, C)$.



Déf. Un **sous - complexe simplicial** d'un complexe simplicial K dans \mathbb{R}^N est un sous-ensemble K' de K qui est lui-même un complexe simplicial dans \mathbb{R}^N . Il suffit pour cela que toute face d'un élément de K' soit elle-même dans K' .

Morphismes entre complexes simpliciaux

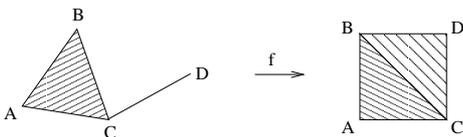
Déf. Un **morphisme** d'un complexe simplicial K de \mathbb{R}^N dans un complexe simplicial L de $\mathbb{R}^{N'}$ est une application f de l'ensemble des sommets de K dans l'ensemble des sommets de L vérifiant :

(Q) Pour tout simplexe σ de K , les images par f des sommets de σ sont des sommets d'un même simplexe τ de L .

On ne demande pas que f soit injective.

On observe que l'application identité de l'ensemble des sommets d'un complexe simplicial K dans lui-même vérifie la condition (Q) et que si $f : K \rightarrow L$ et $g : L \rightarrow M$ sont des morphismes de complexes simpliciaux alors l'application composée $g \circ f$ de l'ensemble des sommets de K dans l'ensemble des sommets de M vérifie (Q). On dispose donc d'une composition des morphismes entre complexes simpliciaux et du morphisme identité. Un morphisme $f : K \rightarrow L$ est un **isomorphisme** de complexes simpliciaux s'il existe $g : L \rightarrow K$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient l'identité de L et l'identité de K respectivement.

Ex. K est formé des simplexes $C(A, B, C)$, $C(C, D)$ et de leurs faces. L est formé des simplexes $C(A, B, C)$, $C(B, C, D)$ et de leurs faces (figure ci-dessous).



L'application $f : A \mapsto A, B \mapsto B, C \mapsto C, D \mapsto D$ est un morphisme de complexes simpliciaux bijectif sur l'ensemble des sommets mais f n'est pas un isomorphisme. Quels sont les morphismes de L dans K ?

Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme entre complexes simpliciaux. A tout simplexe σ de K , de sommets A_0, \dots, A_n , on associe le simplexe $C(f(A_0), \dots, f(A_n))$ de L qu'on note $f(\sigma)$. On note $f(K)$ l'ensemble formé par les $f(\sigma)$, σ décrivant K .

Prop. 1.3 L'ensemble $f(K)$ est un sous-complexe simplicial de L .

Exercice. Pourquoi $C(f(A_0), \dots, f(A_n))$ est-il un simplexe ? Démontrer la proposition.

Espace topologique sous-jacent à un complexe simplicial

Déf. Soit K un complexe simplicial fini dans \mathbb{R}^N . La réunion des simplexes de K munie de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^N est une partie compacte de \mathbb{R}^N (c'est une partie fermée et bornée). On l'appelle l'**espace topologique sous-jacent** à K et on la note $|K|$.

Ex. Soit A un point de \mathbb{R}^N . Le complexe simplicial K associé au simplexe $C(A)$ a un seul simplexe et un seul sommet. L'espace topologique sous-jacent est formé du seul point A . On dit (par abus de langage) que ce complexe simplicial est un point.

Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme entre complexes simpliciaux. D'après le lemme 1.2, pour chaque simplexe σ de K la restriction de f à l'ensemble des sommets de σ s'étend de façon unique en une application affine de σ dans $f(\sigma)$. Si σ et σ' sont deux simplexes de K , les applications affines ainsi définies sur σ et σ' coïncident sur $\sigma \cap \sigma'$. On obtient donc une application bien définie de $|K|$ dans $|L|$ qu'on note $|f|$. L'application $|f|$ est affine par morceaux ("PL-map" dans les textes anglais). On observe que la restriction de $|f|$ à l'ensemble des sommets de K est égale à f donc $|f|$ détermine f .

Lemme 1.4 L'application $|f|$ est continue.

Prop. 1.5 On a les égalités $|\text{Id}_K| = \text{Id}_{|K|}$ et $|g \circ f| = |g| \circ |f|$ pour $f : K \rightarrow L$ et $g : L \rightarrow M$ des morphismes entre complexes simpliciaux. En particulier si f est un isomorphisme de complexes simpliciaux alors $|f|$ est un **homéomorphisme** (une bijection continue dont la réciproque est continue).

Complexe simplicial abstrait

Ce qui suit a pour but de montrer que les complexes simpliciaux et leurs morphismes sont des données essentiellement combinatoires. Malheureusement ce qu'on gagne en clarté est perdu en abstraction.

Déf. Un **complexe simplicial (fini) abstrait** est un ensemble (fini) K d'ensembles finis non vides vérifiant : pour tout élément A de K et pour toute partie non vide $B \subset A$, B est un élément de K .

Un élément de K s'appelle un simplexe de K . La dimension d'un simplexe $A \in K$ est le nombre d'éléments de A moins 1. Les éléments des simplexes de K sont appelés les sommets de K . L'ensemble des sommets de K est donc la réunion ensembliste des simplexes de K . Une partie B d'un simplexe A de K s'appelle une face de K .

Ex. Soit $n \geq 0$ un entier. L'ensemble des parties non vide de $\{0, \dots, n\}$ est un complexe simplicial qu'on appelle **simplexe standard de dimension n** et qu'on note $\Delta[n]$.

Déf. Un sous-complexe simplicial abstrait de K est une partie K' de K qui est elle même un complexe simplicial abstrait.

Un morphisme d'un complexe simplicial abstrait K dans un complexe simplicial abstrait L est une application de l'ensemble des sommets de K dans l'ensemble des sommets de L vérifiant : $\forall \sigma \in K, f(\sigma) \in L$.

Ex. 1) Soit S une partie finie non vide de cardinal $n + 1$. L'ensemble, disons K , des parties non vides de S est un complexe simplicial. Toute bijection $\{0, \dots, n\} \rightarrow S$ définit un isomorphisme du simplexe standard $\Delta[n]$ dans K .

2) Le simplexe standard de dimension 0 a un seul sommet ; on l'appelle aussi **le point** et on le note pt. Soit K un complexe simplicial ; l'unique application de l'ensemble des sommets de K dans le singleton $\{0\}$ définit l'unique morphisme de complexes simpliciaux $K \rightarrow \text{pt}$. Nous utiliserons cette application par la suite.

Réalisation

Soit K un complexe simplicial (fini) dans \mathbb{R}^N . A chaque simplexe σ de K on associe l'ensemble S_σ des sommets de σ . L'ensemble des S_σ , σ décrivant les simplexes de K , est un complexe simplicial (fini) abstrait qu'on note **K**.

Dans le sens inverse soit K un complexe simplicial (fini) abstrait et soit S l'ensemble de ses sommets. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^S des applications de S dans \mathbb{R} . Si s est un élément de S on note e_s l'application $S \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut 1 en s et 0 ailleurs. La famille $(e_s)_{s \in S}$ est une base de \mathbb{R}^S . On identifie S avec la partie de \mathbb{R}^S formée des e_s , s décrivant S . A chaque simplexe σ de K on associe l'enveloppe convexe $C(\sigma)$ des sommets de σ dans \mathbb{R}^S . L'ensemble des $C(\sigma)$, σ décrivant les simplexes de K , est un complexe simplicial dans \mathbb{R}^S qu'on appelle la **réalisation** de K dans \mathbb{R}^S et qu'on note **K**.

On observe que si K est un complexe simplicial fini dans \mathbb{R}^N d'ensemble de sommets S alors la réalisation dans \mathbb{R}^S du complexe simplicial abstrait **K** est canoniquement isomorphe à K . De même si K est un complexe simplicial abstrait (fini) d'ensemble de sommets S alors le complexe simplicial abstrait sous-jacent à **K** est canoniquement isomorphe à K . (En formule $K \simeq \underline{\underline{K}}$.)

Ex. Soit $\sigma = C(A_0, \dots, A_n)$ un simplexe dans \mathbb{R}^N et soit K le complexe simplicial formé de l'ensemble des faces de σ (y compris σ). Alors le complexe simplicial abstrait sous-jacent à K est isomorphe au simplexe standard de dimension n ($\Delta[n]$).

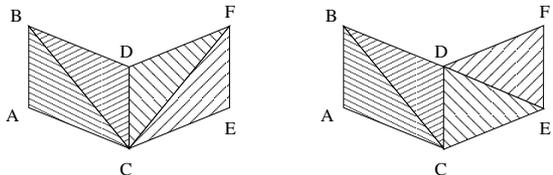
Les définitions sont telles que pour tout couple K, L de complexes simpliciaux abstraits on a une bijection canonique entre l'ensemble des morphismes de K dans L et l'ensemble des morphismes de la réalisation de K dans celle de L .

A un complexe simplicial abstrait K on associe l'espace topologique $|\overline{K}|$ qu'on note encore $|K|$. Il est clair qu'un morphisme $K \rightarrow L$ induit une application continue $|K| \rightarrow |L|$.

Triangulation d'un espace topologique

Déf. Soit X une partie de \mathbb{R}^N . Une triangulation à isomorphisme affine près de X (**triangulation PL**) est un complexe simplicial fini K (abstrait ou dans \mathbb{R}^N) et une bijection $f : |K| \rightarrow X$ tels que pour chaque simplexe $\sigma \in K$ la restriction de f à $|\sigma|$ est affine. Une partie de \mathbb{R}^N admettant une triangulation PL est appelée polytope. Par définition même l'espace topologique sous-jacent à un complexe simplicial est un polytope.

Ex. Considérons les deux triangulations PL suivantes K et L du même polytope formé de deux rectangles pleins non coplanaires s'intersectant suivant un côté commun.



Les deux triangulations PL sont minimales. Les complexes simpliciaux K et L ne sont pas isomorphes bien que les polytopes sous-jacents soient les mêmes.

Déf. Soit X un espace topologique. Une **triangulation à homéomorphisme près** de X est un complexe simplicial fini K (abstrait ou dans \mathbb{R}^N) et un homéomorphisme $|K| \rightarrow X$.

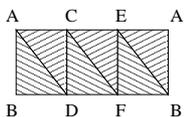
Il n'est pas vrai que tout espace topologique compact est triangulable (à homéomorphisme près). Parmi les triangulations d'un espace topologique triangulable, on peut considérer celles dont le nombre de simplexes est minimal, qu'on appellera triangulation minimale. Idem pour les triangulations PL d'un polytope.

Ex. 1) Soient A, B, C trois points non alignés de \mathbb{R}^2 . Considérons le complexe simplicial K formé des segments $C(A, B)$, $C(B, C)$, $C(A, C)$ et de leurs faces. L'espace topologique sous-jacent à K est homéomorphe au cercle S^1 de sorte qu'on obtient une triangulation de S^1 .

Exercice : Expliciter un tel homéomorphisme. Montrer que la triangulation obtenue est minimale.

2) Plus généralement considérons le complexe simplicial, noté $\partial\Delta[n]$, formé des faces du simplexe standard $\Delta[n]$ de dimension strictement inférieure à n . Alors $|\partial\Delta[n]|$ est homéomorphe à la sphère S^n .

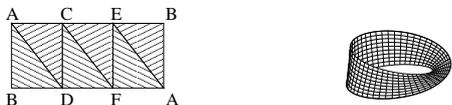
3) Considérons le complexe simplicial abstrait représenté ci-dessous



$K = \{\{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{C, D, F\}, \{C, E, F\}, \{E, F, B\}, \{E, A, B\}$ et les faces de ces simplexes}.

L'espace topologique sous-jacent à K est homéomorphe au cylindre $S^1 \times [0, 1]$ et la triangulation ainsi obtenue est minimale.

4) Le complexe simplicial représenté ci-dessous est-il une triangulation du ruban de Moebius ?



Quelques questions non élémentaires

1. Un espace topologique triangulable est compact et admet une stratification par des espaces homéomorphes à des parties convexes de \mathbb{R}^n . La réciproque est-elle vraie ?

2. Soit K un complexe simplicial abstrait (fini). Quel est le plus petit entier N tel que K se réalise dans \mathbb{R}^N (i.e. soit isomorphe au complexe simplicial abstrait sous-jacent à un complexe simplicial dans \mathbb{R}^N) ?

Ce qui précède montre que N est inférieur ou égal au nombre de sommets de K moins 1. D'autre part N est supérieur ou égal au maximum des dimensions des simplexes de K .

2. Triangulation des espaces quotient

Espaces topologiques quotient

Soit \sim une relation d'équivalence sur un ensemble X . On note \sim_{eq} la relation d'équivalence sur X engendré par \sim : c'est la plus petite relation d'équivalence contenant \sim au sens de l'inclusion des graphes. Pour $x, y \in X$ on a $x \sim_{eq} y$ si et seulement si $x = y$ ou s'il existe un entier $k \geq 1$ et des éléments x_0, \dots, x_k de X tels que $x_0 = x$, $x_k = y$ et $x_i \sim x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \sim x_i$ pour $0 \leq i \leq k-1$.

On note X/\sim et on appelle ensemble **quotient** de X par \sim l'ensemble des classes d'équivalence de X pour la relation \sim_{eq} . On note π la projection $X \rightarrow X/\sim$.

Propriété universelle : Soit f une application de X dans un ensemble Y . Il existe une application $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$ si et seulement si

$$\forall x, x' \in X, x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Un tel \bar{f} est alors unique ; on l'appelle l'**application induite** par f .

Si X est un espace topologique on munit l'ensemble X/\sim de la topologie la plus fine rendant π continue. Ainsi une partie $F \subset X/\sim$ est fermée ssi $\pi^{-1}(F)$ est fermée dans X .

Si f est une application continue de X dans un espace topologique Y induisant une application d'ensembles $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$, alors \bar{f} est continue.

Rappelons qu'un espace topologique X est dit compact si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement fini. X est dit séparé si pour toute paire d'éléments $x, y \in X$ il existe des ouverts U, V de X d'intersection vide tels que $x \in U$ et $y \in V$. L'image d'un compact par une application continue est compact. Si X est séparé, toute partie compacte de X est fermée dans X . On en déduit le :

Lemme 2.1 Soient X un espace compact, Y un espace séparé et $f : X \rightarrow Y$ une application continue surjective. On définit la relation \sim sur X par $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$; alors l'application $X/\sim \rightarrow Y$ induite par f est un homéomorphisme.

Ex. 1) On choisit pour modèle du cercle S^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1. L'application $[0, 1] \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2i\pi t)$ induit un homéomorphisme $[0, 1]/\sim \rightarrow S^1$ où \sim est la relation sur $[0, 1]$ donnée par $0 \sim 1$.

2) L'application de $S^1 \times [0, 1]$ dans le tore $S^1 \times S^1, (z, t) \mapsto (z, \exp(2i\pi t))$, induit un homéomorphisme $(S^1 \times [0, 1])/\sim \rightarrow S^1 \times S^1$ où \sim est la relation sur $S^1 \times [0, 1]$ donnée par $(z, 0) \sim (z, 1)$ pour tout $z \in S^1$.

3) Soit $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ l'application $z \mapsto \bar{z}$ (symétrie par rapport à l'axe réel). La bouteille de Klein est le quotient du cylindre $S^1 \times [0, 1]$ par la relation $(z, 0) \sim (\varphi(z), 1)$.

4) Soit G un groupe fini agissant sur un espace topologique X . On définit la relation \sim sur X par $x \sim g.x$ pour tout $x \in X$ et $g \in G$. On note X/G le quotient X/\sim appelé quotient de X par G . L'espace projectif réel de dimension $n, \mathbb{R}P^n$, est le quotient $S^n/(\mathbb{Z}/2)$ où $\mathbb{Z}/2$ agit sur S^n par la symétrie centrale par rapport à 0 (antipodie).

Cas particulier : les sommes amalgamées

Soient X, Y, Z des espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z$ des applications continues. On note $Y \cup_X Z$ le quotient de la réunion disjointe $Y \sqcup Z$ par la relation \sim donnée par $f(x) \sim g(x)$ pour tout $x \in X$. L'espace topologique $Y \cup_X Z$ s'appelle la **somme amalgamée** de Y et de Z sous X ou encore la somme amalgamée du diagramme $Y \leftarrow X \rightarrow Z$. Notons (p, q) la projection $Y \sqcup Z \rightarrow Y \cup_X Z$ ($p : Y \rightarrow Y \cup_X Z, q : Z \rightarrow Y \cup_X Z$). L'espace topologique $Y \cup_X Z$ muni des applications p, q vérifie la propriété universelle suivante :

Soient T un espace topologique et $p' : Y \rightarrow T, q' : Z \rightarrow T$ des applications continues telles que $p' \circ f = q' \circ g$ alors il existe une application continue $h : Y \cup_X Z \rightarrow T$ et une seule vérifiant $p' = h \circ p$ et $q' = h \circ q$.

On en déduit :

Soient $Y \leftarrow X \rightarrow Z$ et $Y' \leftarrow X' \rightarrow Z'$ des diagrammes d'espaces topologiques et $X \rightarrow X', Y \rightarrow Y', Z \rightarrow Z'$ des homéomorphismes tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Y & \leftarrow & X & \rightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \leftarrow & X' & \rightarrow & Z' \end{array}$$

commute ; alors l'application induite $Y \cup_X Z \rightarrow Y' \cup_{X'} Z'$ est un homéomorphisme.

Complexes simpliciaux quotient

Soient K un complexe simplicial et \sim une relation sur S_K (l'ensemble des sommets de K). On note π la projection $S_K \rightarrow S_K/\sim$. L'ensemble formé par les parties $\pi(S_\sigma)$ de S_K/\sim , σ décrivant K , est un complexe simplicial abstrait. En effet $\pi(S_\sigma)$ est un ensemble fini non vide et pour toute partie non vide A de $\pi(S_\sigma)$ il existe une face τ de σ tel que $S_\tau = \pi^{-1}(A) \cap S_\sigma$ de sorte que $\pi(S_\tau) = A$.

Rq. On n'a pas en général $\pi(S_\sigma) \cap \pi(S_\tau) = \pi(S_{\sigma \cap \tau})$.

Déf. On appelle $\{\pi(S_\sigma), \sigma \in K\}$ le **complexe simplicial quotient** de K par la relation \sim et on le note K/\sim .

L'application $\pi : S_K \rightarrow S_{K/\sim} = (S_K)/\sim$ est un morphisme de complexes simpliciaux et vérifie la propriété universelle suivante :

Pour toute application simpliciale f de K dans un complexe simplicial L il existe une application simpliciale $\bar{f} : K/\sim \rightarrow L$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$ si et seulement si $\forall s, s' \in S_K, s \sim s' \Rightarrow f(s) = f(s')$. Un tel \bar{f} est alors unique ; on l'appelle l'application simpliciale induite par f .

La "réalisation" de π , $|\pi| : |K| \rightarrow |K/\sim|$ est continue et surjective ; elle induit un homéomorphisme $|K|/\sim \rightarrow |K/\sim|$, où \sim est la relation sur $|K|$ donnée par $x \sim y \Leftrightarrow |\pi|(x) = |\pi|(y)$, en vertu du lemme 2.1

Ex. Soit \sim la relation sur $S_{\Delta[2]}$ donnée par $0 \sim 2$, alors $\Delta[2]/\sim$ est le complexe simplicial abstrait $\{\{\bar{0}, \bar{1}\}, \{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}\} \simeq \Delta[1]$, où on a noté $\bar{0}$ la classe d'équivalence du sommet 0 dans $S_{\Delta[2]}/\sim$, etc.

Cas particulier : sommes amalgamées de complexes simpliciaux

Soient K, L, M des complexes simpliciaux et $f : K \rightarrow L, g : K \rightarrow M$ des applications simpliciales. On note $L \cup_K M$ le complexe simplicial quotient $(L \sqcup M)/\sim$ où \sim est la relation sur $S_{L \sqcup M} = S_L \sqcup S_M$ donnée par $f(s) \sim g(s)$ pour tout $s \in S_K$, et on l'appelle la **somme amalgamée** de L et de M sous K ou encore la somme amalgamée du diagramme $L \leftarrow K \rightarrow M$.

Notons (p, q) la projection $L \sqcup M \rightarrow L \cup_K M$ ($p : L \rightarrow L \cup_K M, q : M \rightarrow L \cup_K M$). Le complexe simplicial $L \cup_K M$ muni des deux applications simpliciales p, q vérifie la propriété universelle suivante :

Soit N un complexe simplicial et $p' : L \rightarrow N, q' : M \rightarrow N$ des applications simpliciales telles que $p' \circ f = q' \circ g$ alors il existe une et une seule application simpliciale $h : L \cup_K M \rightarrow N$ vérifiant $p' = h \circ p$ et $q' = h \circ q$.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & M \\ \downarrow f & & \downarrow q \\ L & \xrightarrow{p} & L \cup_K M \end{array}$$

induit un diagramme commutatif d'espaces topologiques et applications continues

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{|g|} & |M| \\ \downarrow |f| & & \downarrow |q| \\ |L| & \xrightarrow{|p|} & |L \cup_K M| \end{array}$$

donc une application continue $h : |L| \cup_{|K|} |M| \rightarrow |L \cup_K M|$. Si L et M sont finis, il suffit à cette application d'être bijective pour qu'elle soit un homéomorphisme en vertu du lemme 2.1 puisque $|L| \cup_{|K|} |M|$ est le quotient d'un espace compact donc est compact et puisque $|L \cup_K M|$ est séparé. On sait déjà que $S_L \sqcup S_M \rightarrow S_{L \cup_K M}$ est surjective donc $|L| \sqcup |M| \rightarrow |L \cup_K M|$ est surjective donc également h .

Notons pour $n \geq 0$ et K un complexe simplicial, $K_{(n)}$ le sous-complexe simplicial de K formé des simplexes de dimension inférieure ou égale à n . Une application simpliciale $f : K \rightarrow L$ se restreint en une application simpliciale $K_{(n)} \rightarrow L_{(n)}$, laquelle induit une application d'ensembles $K_{(n)} \rightarrow L_{(n)}, \sigma \mapsto f(\sigma)$

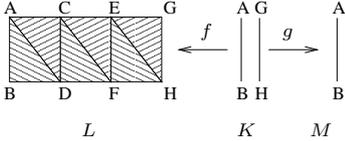
Lemme 2.2 Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application $|L| \cup_{|K|} |M| \rightarrow |L \cup_K M|$ est un homéomorphisme.
- (ii) Pour chaque entier n l'application $L_{(n)} \cup_{K_{(n)}} M_{(n)} \rightarrow (L \cup_K M)_{(n)}$ est une bijection d'ensembles.

Une condition suffisante (avec les notations de la section 5) : $f : K \rightarrow L$ est injective (*i.e.* $f : S_K \rightarrow S_L$ est injective) et saturée (*i.e.* pour toute partie A de S_K , si $f(A) = S_\tau$ pour un simplexe τ de L alors $A = S_\sigma$ pour un simplexe σ de K) et pour tout sommet s de L la restriction de g à $f^{-1}(\bigcup_{\sigma \in \text{St}(s)} S_\sigma)$ est injective (on dira que g vérifie la condition (Inj^*) relativement à f).

Ex. K est formé du 1-simplexe $\{0, 2\}$ et de ses faces ; $L = \partial\Delta[2]$; $f : K \rightarrow L$ est l'inclusion ; g est l'application $K \rightarrow \text{pt}$. Alors $L \cup_K \text{pt}$ est isomorphe à $\Delta[1]$ alors que $|L \cup_{|K|} |\text{pt}| = ([0, 1] \cup [1, 2])/0 \sim 2$ est homéomorphe au cercle S^1 . f est injective et saturée mais g ne vérifie pas la condition (Inj^*) .

Ex. 1) La triangulation du cylindre et du ruban de Moebius : L est la triangulation d'un rectangle plein $ABHG$ du plan donnée ci-dessous (figure) ; K est formé de la réunion disjointe des 1-simplexes AB et GH et de leurs faces ; M est formé du 1-simplexe AB et de ses faces. f est l'inclusion de K dans L (f est injective et saturée).

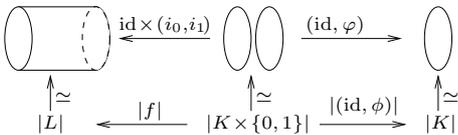


Prenons pour g l'application simpliciale $A, G \mapsto A$; $B, H \mapsto B$. Alors g vérifie la condition (Inj^*) relativement à f donc $|L \cup_K M|$ est homéomorphe à $|L \cup_{|K|} |M| \simeq S^1 \times [0, 1]$ (le cylindre).

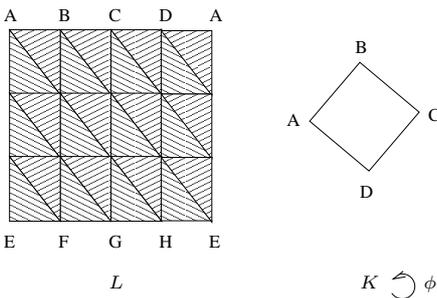
Prenons maintenant pour g l'application simpliciale $A, H \mapsto A$; $B, G \mapsto B$. g vérifie toujours la condition (Inj^*) relativement à f donc $|L \cup_K M|$ est homéomorphe à $|L \cup_{|K|} |M|$ lequel est un ruban de Moebius.

2) La bouteille de Klein : On choisit une triangulation à homéomorphisme près L du cylindre $S^1 \times [0, 1]$ et une triangulation K de S^1 avec une application simpliciale injective $f : K \times \{0, 1\} \rightarrow L$ telle que la composée $|K| \times \{0, 1\} \simeq |K \times \{0, 1\}| \xrightarrow{|f|} |L| \xrightarrow{\simeq} S^1 \times [0, 1]$ corresponde via l'homéomorphisme $|K| \rightarrow S^1$ à l'inclusion $S^1 \times \{0, 1\} \rightarrow S^1 \times [0, 1]$. (Cf la triangulation de $|K| \times [0, 1]$ dans la section 6).

On choisit K de sorte que la symétrie par rapport à l'axe réel $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ (Cf l'ex 3 du paragraphe sur les espaces topologiques quotient) corresponde via l'homéomorphisme $|K| \rightarrow S^1$ à une application simpliciale $\phi : K \rightarrow K$. Soient i_0 et i_1 les inclusions $K \rightarrow K \times \{0, 1\}$. On définit $g : K \times \{0, 1\} \rightarrow K$ par $g \circ i_0 = \text{id}_K$ et $g \circ i_1 = \phi$.



On choisit L (contenant les deux copies de K) de sorte que f soit saturée et g vérifie la relation (Inj^*) relativement à f . Un choix possible pour K est le bord du carré $ABCD$ avec $\phi : A \mapsto A, C \mapsto C, B \mapsto D, D \mapsto B$ (figure ci-dessous) et pour L la triangulation du cylindre proposée ci-dessous



Cas particulier : quotient d'un complexe simplicial par l'action d'un groupe

Soient G un groupe fini et K un complexe simplicial. Une action simpliciale de G sur K est la donnée d'un homomorphisme de groupes ϕ de G sur le groupe des isomorphismes (simpliciaux) de K . On a donc pour tout $g \in G$ une application simpliciale $\phi(g) : K \rightarrow K$ avec les relations $\phi(1) = \text{id}_K$ et $\phi(g.g') = \phi(g) \circ \phi(g')$. L'application $g \mapsto |\phi(g)|$ est une action de G sur l'espace topologique $|K|$.

On note K/G le quotient de K pour la relation \sim sur S_K donnée par $s \sim \phi(g)(s)$ pour tout $s \in S_K$ et tout $g \in G$. La projection $K \rightarrow K/G$ induit une application continue surjective $|K| \rightarrow |K/G|$ invariante par l'action

de G , donc une application continue $|K|/G \rightarrow |K/G|$. Comme pour les sommes amalgamées, si K est fini, il suffit à cette application d'être bijective pour être un homéomorphisme. (On sait déjà qu'elle est surjective.)

Lemme 2.3 Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application $|K|/G \rightarrow |K/G|$ est un homéomorphisme.
- (ii) Pour chaque entier n l'application $K_{(n)}/G \rightarrow (K/G)_{(n)}$ est une bijection d'ensembles.

Une condition suffisante : Pour tout sommet $s \in S_K$ et tout $g \in G$, $\text{St}(s) \cap \text{St}(\phi(g)(s)) = \emptyset$.

Ex. Triangulation du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2 = S^2/(\mathbb{Z}/2)$:

- 1) On choisit une triangulation L de la sphère S^2 avec un automorphisme simplicial $\phi : L \rightarrow L$ dont la réalisation $|\phi|$ s'identifie à l'antipodie $S^2 \rightarrow S^2$ (en particulier $\phi \circ \phi = \text{id}_L$) et vérifiant la condition suffisante ci-dessus. Pour cela on peut décrire la sphère S^2 comme la réunion de deux hémisphères collés le long de l'équateur S^1 .
- 2) $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à la réunion d'un disque D^2 et du ruban de Moebius collés le long de leur bord S^1 .
- 3) $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à la somme amalgamée $D^2 \xleftarrow{f} S^1 \xrightarrow{\pi} S^1/(\mathbb{Z}/2) \simeq S^1$ où f est l'inclusion de S^1 comme bord du disque et où π est la projection de S^1 sur son quotient par l'action par antipodie de $\mathbb{Z}/2$.

Construire une triangulation suivant chaque programme (1) (2) et (3).

3. Complexes de groupes abéliens et homologie

Groupes abéliens de type fini

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de groupes abéliens (ou homomorphisme). On appelle noyau de f et on note $\ker(f)$ la partie de A formée des éléments a tels que $f(a) = 0$. On appelle image de f et on note $\text{im}(f)$ la partie de B formée des éléments $f(a)$, a décrivant A . Tous deux sont des sous-groupes abéliens de A et de B respectivement.

Soit A' un sous-groupe abélien de A . On appelle quotient de A par A' et on note A/A' l'ensemble des parties de A de la forme $a + A' = \{a + a', a' \in A'\}$, a décrivant A , munie de l'unique structure de groupe telle que la projection $p : A \rightarrow A/A'$, $a \mapsto a + A'$ soit un homomorphisme. Les éléments de A/A' forment une partition de A . La somme de $a + A'$ et de $b + A'$ dans A/A' est $(a + b) + A'$; l'élément neutre est $0 + A' = A'$.

Ex. Les groupes quotients de \mathbb{Z} sont les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n un entier, qu'on notera pour faire court \mathbb{Z}/n .

Lemme 3.1 Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de groupes abéliens et $A' \subset A$ un sous-groupe abélien de A . Il existe un homomorphisme $g : A/A' \rightarrow B$ tel que f soit la composée $g \circ p$ si et seulement si A' est contenu dans le noyau de f , auquel cas le morphisme g est unique.

Si $A' = \ker(f)$ alors l'homomorphisme g ci-dessus est unique. On l'appelle l'homomorphisme $A/A' \rightarrow B$ induit par f .

Plus généralement soient A un groupe abélien et \sim une relation sur les éléments de A . On forme le sous-groupe B de A engendré par tous les éléments qui s'écrivent $a - a'$ avec $a \sim a'$. Le groupe quotient A/B vérifie la propriété universelle suivante :

Lemme 3.2 Un morphisme de groupes abéliens $f : A \rightarrow C$ s'écrit comme la composée de la projection $A \rightarrow A/B$ avec un morphisme $A/B \rightarrow C$ si et seulement si on a

$$\forall a, a' \in A, a \sim a' \Rightarrow f(a) = f(a')$$

(auquel cas le morphisme $A/B \rightarrow C$ est unique).

Le quotient A/B s'appelle le groupe quotient de A par la relation \sim , le morphisme $A/B \rightarrow C$ s'appelle le morphisme induit par $f : A \rightarrow C$.

Soit S un ensemble fini. On note \mathbb{Z}^S le groupe abélien des applications de S dans \mathbb{Z} . Pour chaque $s \in S$ notons e_s l'application $S \rightarrow \mathbb{Z}$ qui vaut 1 en s et 0 ailleurs. Toute application $f : S \rightarrow \mathbb{Z}$ s'écrit $f = \sum_{s \in S} f(s)e_s$ et cette écriture est unique. On dit que \mathbb{Z}^S est un groupe abélien libre et que la famille $(e_s)_{s \in S}$, qu'on identifie à S , en est une base.

Lemme 3.3 Soit A un groupe abélien et $f : S \rightarrow A$ une application (d'ensembles). Alors f s'étend de façon unique en un homomorphisme $\mathbb{Z}^S \rightarrow A$.

On dit qu'un groupe abélien A est de type fini s'il existe une partie finie S de A qui engendre A , *i.e.* telle que tout élément de A s'écrive comme combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de S . Il revient au même de dire qu'il existe un ensemble fini S et un homomorphisme surjectif $\mathbb{Z}^S \rightarrow A$.

Soit A un groupe abélien de type fini. Une présentation de A est la donnée d'ensembles finis S et S' , d'un homomorphisme surjectif $f : \mathbb{Z}^S \rightarrow A$ et d'un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}^{S'}$ dans le noyau de f . Comme conséquence de la proposition suivante, toute groupe abélien de type fini admet une présentation finie :

Prop. 3.4 Soit $n > 0$ un entier et f un homomorphisme de \mathbb{Z}^n dans un groupe abélien A . Alors il existe une famille (e_1, \dots, e_n) d'éléments de \mathbb{Z}^n et des entiers positifs d_1, \dots, d_n tels que d_i divise d_{i+1} pour $1 \leq i < n$, vérifiant :

- (i) la famille (e_i) est une base de \mathbb{Z}^n ;
- (ii) la sous-famille de $(d_i e_i)$ formée des éléments non nuls est une base du noyau de f . (En particulier le noyau de f est un groupe abélien libre de dimension $\leq n$.)

On dit que (e_i) est une base de \mathbb{Z}^n adaptée à $\ker(f)$.

Sommes directes

Soient A un groupe abélien et H, G deux sous-groupes de A . On note $H + G$ le sous-groupe de A formé des sommes d'un élément de H avec un élément de G . Si l'intersection $H \cap G$ ne contient que 0 on dit que la somme de H et de G est directe et on la note.

Soient A et B deux groupes abéliens. On identifie A , respectivement B , avec le sous-groupe de $A \times B$ formé des couples $(a, 0)$, a décrivant A , respectivement $(0, b)$, b décrivant B . Alors la somme de A et de B dans $A \times B$ est directe, on écrira aussi bien $A \oplus B$ pour $A \times B$.

On dispose des inclusions canoniques $A \rightarrow A \oplus B$ et $B \rightarrow A \oplus B$ et des projections $A \oplus B \rightarrow A$, $A \oplus B \rightarrow B$. La donnée d'un homomorphisme d'un groupe abélien C dans $A \oplus B$ équivaut à celle des deux composées $C \rightarrow A \oplus B \rightarrow A$ et $C \rightarrow A \oplus B \rightarrow B$. On décrira un tel homomorphisme par le couple des morphismes associés. La donnée d'un homomorphisme $A \oplus B \rightarrow C$ équivaut à celle des deux restrictions $A \rightarrow A \oplus B \rightarrow C$ et $B \rightarrow A \oplus B \rightarrow C$. On décrira un tel morphisme par le couple des morphismes associés.

Plus généralement un homomorphisme d'une somme directe $A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ dans une somme directe $B_1 \oplus \dots \oplus B_m$ se décrit par une matrice à m lignes et n colonnes de morphismes $A_j \rightarrow B_i$. Lorsque les A_j et les B_i sont tous égaux à \mathbb{Z} et en notant k l'homomorphisme 'ultiplication par k ', on retrouve la matrice d'un homomorphisme $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$.

Ex. Quels sont les homomorphismes $\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4 \rightarrow \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$?

Corollaire 3.5 Avec les hypothèses et les conclusions de la proposition 3.4, f induit un isomorphisme

$$\mathbb{Z}/d_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_n \rightarrow \text{Im}(f) .$$

Complexes de groupes abéliens et homologie

Déf. Un **complexe de groupes abéliens** est la donnée d'une suite $(C_n)_{n \geq 0}$ de groupes abéliens et d'une suite $(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \geq 1}$ d'homomorphismes vérifiant $d_n \circ d_{n+1} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

On pose $C_{-1} = \{0\}$ et $d_0 =$ le morphisme nul.

L'application $(d_n) : \oplus_n C_n \rightarrow \oplus_n C_{n-1}$ est appelé la **différentielle** du complexe et également noté d . Les éléments du noyau de d_n sont appelés les **cycles** de C_n et on note, ceux de l'image de d_n sont appelés les **bords** de C_{n-1} . Le complexe (C_n, d_n) est aussi noté C_* ou (C_*, d) .

L'**homologie** d'un tel complexe est la suite des groupes abéliens quotient $H_n(C) := \ker(d_n)/\text{im}(d_{n+1})$, $n \geq 0$. On la note $H_*(C)$.

Ex. $\dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{2\text{id}, -2\text{id}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ où le groupe 0 le plus à droite est en degré -1 . L'homologie de ce complexe est 0 en degré 2 et 1, $\mathbb{Z}/2$ en degré 0.

Un morphisme d'un complexe (de groupes abéliens) C_* dans un complexe D_* est une suite d'homomorphismes $f_n : C_n \rightarrow D_n$, $n \geq 0$, telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & D_{n+1} \\ \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d_{n+1} \\ C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n \end{array}$$

commutent pour tout $n \geq 0$, *i.e.* telle que $d_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Une telle suite de morphismes transforme les cycles, respectivement bords, de C_n en cycles, respectivement bords, de D_n donc induit une suite de morphismes $H_n(C) \rightarrow H_n(D)$, $n \geq 0$: pour chaque entier n la composée $\ker(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}) \xrightarrow{f_n} \ker(d_n : D_n \rightarrow D_{n-1}) \rightarrow H_n(D)$ est nulle sur $\text{im}(d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n)$ donc se factorise via $H_n(C)$.

4. Homologie simpliciale

Simplexes numérotés, orientés

Soient K un complexe simplicial et σ un simplexe de K de dimension n (ou n -**simplexe**). Une numérotation des sommets de σ est la donnée d'une bijection f de $\{0, \dots, n\}$ dans l'ensemble S_σ des sommets de σ ou de façon équivalente d'un ordre total sur l'ensemble des sommets de σ (et on posera $f(0) =$ "le plus petit élément", etc.). Elle est décrite par le $n + 1$ -uplet formé des sommets de σ écrits dans l'ordre. On notera ainsi (A_0, \dots, A_n) un **simplexe numéroté** de dimension n . $(A_{\varphi(0)}, \dots, A_{\varphi(n)})$, φ décrivant l'ensemble des permutations de $\{0, \dots, n\}$, décrit l'ensemble des numérotations d'un même simplexe d'ensemble de sommets $\{A_0, \dots, A_n\}$.

Déf. Une orientation de σ est la donnée d'une numérotation $f : \{0, \dots, n\} \rightarrow S_\sigma$ à une permutation paire (*i.e.* de signature 1) près de $\{0, \dots, n\}$. La donnée d'un simplexe σ et d'une orientation est appelée **simplexe orienté** de K .

On note $[A_0, \dots, A_n]$ le simplexe orienté associé à la numérotation (A_0, \dots, A_n) des sommets de σ . Les simplexes de dimension 0 n'admettent qu'une seule orientation ; les simplexes de dimension > 0 admettent exactement deux orientations.

Ex. Considérons le complexe simplicial $\Delta[2] = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$. Les simplexes de dimension 0 : $\{0\}, \{1\}, \{2\}$ n'ont qu'une seule orientation puisqu'ils n'ont qu'une seule numérotation. Chaque simplexe de dimension 1 a deux orientations qui correspondent aux deux numérotations : par exemple $(0, 1)$ et $(1, 0)$ définissent deux orientations différentes du simplexe $\{0, 1\}$. Le simplexe $\{0, 1, 2\}$ admet six numérotations différentes qui donnent les deux orientations suivantes : $[0, 1, 2] = [1, 2, 0] = [2, 0, 1]$ et $[1, 0, 2] = [0, 2, 1] = [2, 1, 0]$.

Complexe des chaînes

Déf. Le groupe des **chaîne en degré** n d'un complexe simplicial K est le groupe quotient du groupe abélien libre de base les simplexes numérotés de dimension n de K par la relation sur les générateurs :

$$(A_0, \dots, A_n) \sim \epsilon(\varphi)(A_{\varphi(0)}, \dots, \varphi(n))$$

pour tout n -simplexe numéroté (A_0, \dots, A_n) de K et toute permutation φ de $\{0, \dots, n\}$, où $\epsilon(\varphi) \in \{-1, 1\}$ est la signature de φ . On le note $C_n(K)$.

Deux simplexes numérotés (A_0, \dots, A_n) et $(A_{\varphi(0)}, \dots, \varphi(n))$ qui diffèrent par une permutation φ de signature 1 définissent le même élément de $C_n(K)$. Cet élément ne dépend donc que du simplexe orienté $[A_0, \dots, A_n]$, on le notera encore $[A_0, \dots, A_n]$.

Prop. 4.1 Choisissons pour chaque n -simplexe σ de K une orientation \mathcal{O}_σ ; alors toute chaîne en degré n de K s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients \mathbb{Z} des n -simplexes orientés $(\sigma, \mathcal{O}_\sigma)$; autrement dit la famille $((\sigma, \mathcal{O}_\sigma)_\sigma$ indexée par les n -simplexes de K est une base de $C_n(K)$.

En pratique on choisit une orientation des n -simplexes de K en choisissant un ordre total sur les sommets de K : un tel ordre induit un ordre total sur les sommets de chaque simplexe de K donc une numérotation des sommets de ces simplexes. En pratique également on définit les homomorphismes de $C_n(K)$ dans un groupe abélien D par leurs valeurs sur les générateurs (A_0, \dots, A_n) . On a en effet d'après les lemmes 3.2 et 3.3 :

Prop. 4.2 Pour tout groupe abélien D la donnée d'un morphisme de groupe abélien $f : C_n(K) \rightarrow D$ équivaut à la donnée des images par f des générateurs (A_0, \dots, A_n) sous la condition

$$f((A_{\varphi(0)}, \dots, A_{\varphi(n)})) = \epsilon(\varphi)f((A_0, \dots, A_n))$$

pour tout simplexe numéroté (A_0, \dots, A_n) et pour toute permutation φ .

Déf. On définit "l'opérateur de bord" $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ pour $n \geq 1$ par

$$d_n((A_0, \dots, A_n)) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_n]$$

pour tout générateur (A_0, \dots, A_n) , où $[A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_n]$ désigne la classe du n -uplet obtenu en supprimant A_i en position i . On pose $d_0 = 0$, le morphisme nul $C_0(K) \rightarrow \{0\}$.

On vérifie que d_n est bien défini, *i.e.* qu'il vérifie $d_n(A_{\varphi(0)}, \dots, A_{\varphi(n)}) = \epsilon(\varphi)d_n((A_0, \dots, A_n))$ pour toute permutation φ .

Lemme 4.3 La composée $d_n \circ d_{n+1}$ est le morphisme nul $C_{n+1}(K) \rightarrow C_n(K)$, autrement dit la suite $d = (d_n)$ est une différentielle.

Déf. Le complexe de groupes abéliens $(C_*(K), d)$ est appelé **complexe des chaînes** de K ; son homologie est appelé **homologie du complexe simplicial** K et noté $H_*(K)$.

Ex. 1) $\text{pt} = \Delta[0]$ est le complexe simplicial avec un seul simplexe et un seul sommet noté 0. $C_0(\text{pt})$ est le groupe abélien libre engendré par le seul 0-simplexe orienté $[0]$ et $C_n(\text{pt})$ est le groupe nul pour $n \neq 0$. Les différentielles sont forcément nulles. $H_0(\text{pt})$ est isomorphe à \mathbb{Z} , engendré par la classe du cycle $[0]$, et $H_n(\text{pt})$ est le groupe nul si $n \neq 0$.

2) $\partial\Delta[2]$ est le complexe simplicial formé des trois 1-simplexes $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$ et $\{1, 2\}$ et de leurs faces.

$C_0(\partial\Delta[2])$ est le groupe abélien libre de base $([0], [1], [2])$ (donc de dimension 3).

On obtient une base de $C_1(\partial\Delta[2])$ en choisissant une orientation des 1-simplexes. L'ordre naturel sur les sommets 0, 1, 2 donnent la base $([0, 1], [0, 2], [1, 2])$.

La différentielle d_1 est donnée par $d_1([0, 1]) = [1] - [0]$, $d_1([0, 2]) = [2] - [0]$, $d_1([1, 2]) = [2] - [1]$.

Les groupes $C_n(\partial\Delta[2])$ sont nuls pour $n \neq 0, 1$.

On observe que C_0 est la somme directe de $\mathbb{Z}[0]$ avec $\text{im}(d_1)$ donc $H_0(\partial\Delta[2])$ est isomorphe à \mathbb{Z} , engendré par la classe de $[0]$.

$H_1(\partial\Delta[2])$ est égal au noyau de d_1 , donc à l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers $x[0, 1] + y[0, 2] + z[1, 2]$ vérifiant

$$(-x - y)[0] + (x - z)[1] + (y + z)[2] = 0$$

soit $x = z = -y$. Le groupe d'homologie en degré 1 est donc isomorphe à \mathbb{Z} engendré par $[0, 1] - [0, 2] + [1, 2]$. On observe que cette 1-chaîne est le bord de la 2-chaîne $[0, 1, 2]$ dans $C_*(\Delta[2])$.

Morphisme induit par une application simpliciale

Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme entre complexes simpliciaux. On s'est donc donné une application de l'ensemble S_K dans S_L vérifiant : Pour tout simplexe σ de K , il existe un simplexe τ de L tel que $f(S_\sigma) = S_\tau$, où $S_K, S_L, S_\sigma, S_\tau$ désignent l'ensemble des sommets de K , de L , de σ , etc..

Déf. On définit l'homomorphisme $C_n(f) : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$ sur les générateurs $[A_0, \dots, A_n]$ par

$$\begin{aligned} C_n(f)([A_0, \dots, A_n]) &= [f(A_0), \dots, f(A_n)] \text{ si les sommets } f(A_0), \dots, f(A_n) \text{ sont distincts,} \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

L'homomorphisme $C_n(f)$ est bien défini en vertu de la proposition 4.2 de car $C_n(f)([A_{\varphi(0)}, \dots, A_{\varphi(n)}]) = \epsilon(\varphi)C_n(f)([A_0, \dots, A_n])$ pour tout n -simplexe orienté $[A_0, \dots, A_n]$ et toute permutation φ .

On note aussi f_* la suite d'homomorphismes $(C_n(f))$.

Prop. 4.4 (a) $C_n(\text{id}) = \text{id}_{C_n(K)}$ et, pour des morphismes $f : K \rightarrow L$ et $g : L \rightarrow M$ entre complexes simpliciaux, $C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$.

(b) f_* commute avec la différentielle d , *i.e.* pour tout entier $n \geq 0$, $d_{n+1} \circ C_{n+1}(f) = C_n(f) \circ d_{n+1} : C_{n+1}(K) \rightarrow C_n(L)$.

Le point (b) de la proposition dit que $f_* : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$ est un morphisme de complexes de groupes abéliens. Il induit donc un morphisme $H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ qu'on note encore f_* .

Ex. Soit L un complexe simplicial et K un sous-complexe simplicial de L ; alors l'inclusion $K \rightarrow L$ induit au niveau des complexes de chaînes un morphisme injectif $C_*(K) \rightarrow C_*(L)$ qui permet d'identifier $C_*(K)$ à un sous-complexe de groupes abéliens de $C_*(L)$. L'application induite en homologie $H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ n'est pas injective en générale : par exemple l'inclusion $\partial\Delta[2] \rightarrow \Delta[2]$ induit le morphisme nul

$$\mathbb{Z} \simeq H_1(\partial\Delta[2]) \rightarrow H_1(\Delta[2]) \simeq 0 .$$

(Pour le calcul de $H_1(\Delta[2])$ voir la description de $H_*(\Delta[n])$ plus loin.)

Application : composantes connexes d'un complexe simplicial et homologie

Déf. Un complexe simplicial K est dit **connexe** si pour toute paire de sommets distincts A, B de K il existe une suite de 1-simplexes (désignés par leurs sommets) $\{A_0, A_1\}, \dots, \{A_{n-1}, A_n\}$ de K tels que $A_0 = A$ et $A_n = B$.

Ex. Le complexe simplicial $\Delta[n]$ est connexe ; $\partial\Delta[1]$ n'est pas connexe.

Prop. 4.5 Soit K un complexe simplicial non vide et connexe ; alors le morphisme $K \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme $H_0(K) \rightarrow H_0(\text{pt})$.

Rq. L'homologie du point est nulle en degré strictement positif donc également le morphisme $H_*(K) \rightarrow H_*(\text{pt})$.

Soit K un complexe quelconque. On introduit la relation suivante sur éléments (les simplexes) de K : $\sigma \sim \tau$ si $\sigma = \tau$ ou s'il existe une suite de 1-simplexes $\{A_0, A_1\}, \dots, \{A_{n-1}, A_n\}$ de K tels que A_0 est un sommet de σ et A_n est un sommet de τ .

Prop. 4.6 (a) Cette relation est une relation d'équivalence sur K .

(b) Les classes d'équivalence sont des sous-complexes simpliciaux connexes de K .

Comme les classes d'équivalence forment une partition de K on obtient une décomposition de K comme réunion disjointe de complexes simpliciaux connexes qu'on appelle **composantes connexes** de K .

Prop. 4.7 Soient K et L deux complexes simpliciaux et notons $K \sqcup L$ le complexe simplicial formé de la réunion disjointe de K et de L . Alors les inclusions $K \rightarrow K \sqcup L$ et $L \rightarrow K \sqcup L$ induisent pour tout entier n un isomorphisme

$$H_n(K) \oplus H_n(L) \rightarrow H_n(K \sqcup L).$$

Démonstration. Pour chaque entier n le groupe abélien $C_n(K \sqcup L)$ est la somme directe des groupes abéliens $C_n(K)$ et $C_n(L)$ et la différentielle d_n est la somme directe des différentielles de $C_n(K)$ et de $C_n(L)$. \square

Corollaire 4.8 $H_0(K)$ est un groupe abélien libre de dimension le nombre de composantes connexes de K .

Applications simpliciales contiguës et homologie

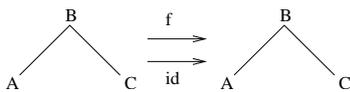
Déf. Deux morphismes $f, g : K \rightarrow L$ entre complexes simpliciaux sont dits **contiguës** si pour tout simplexe σ de K , il existe un simplexe τ de L tel que

$$f(S_\sigma) \cup g(S_\sigma) = S_\tau$$

(où S_σ, S_τ désigne l'ensemble des sommets de σ, τ , etc.)

Cette relation est reflexive, symétrique mais pas transitive a priori.

Ex. 1) $K = L$ est le complexe simplicial dans \mathbb{R}^2 formé des segments $[A, B], [B, C]$ et de leurs faces (figure ci-dessous). f est l'application simpliciale donnée par $A \mapsto A, B \mapsto B, C \mapsto B$; g est l'identité. Alors f et g sont contiguës.



Prenons maintenant $f : A \mapsto A, B \mapsto A, C \mapsto A$, alors f et g ne sont pas contiguës.

2) Montrer par un exemple que la relation de contiguïté n'est pas transitive.

Nous trouvons ici le premier théorème du cours :

Théorème 4.9 Si $f, g : K \rightarrow L$ sont deux applications simpliciales contiguës alors les morphismes induits en homologie $f_*, g_* : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ sont les mêmes.

Le théorème est la conséquence des deux propositions 4.10 et 4.11 qui suivent :

Déf. Deux morphismes $f_*, g_* : C_* \rightarrow D_*$ entre complexes de groupes abéliens sont dits homotopes s'il existe une suite d'homomorphismes $H_n : C_n \rightarrow D_{n+1}, n \geq 0$ vérifiant

$$\forall n \geq 0, f_n - g_n = d_{n+1}H_n + H_{n-1}d_n$$

avec la convention $C_{-1} = \{0\}, H_{-1} = \text{“le morphisme nul”}$.

Ex. Montrer que la relation d'homotopie entre morphismes de complexes de groupes abéliens est une relation d'équivalence.

Prop. 4.10 Si $f_*, g_* : C_* \rightarrow D_*$ sont des morphismes homotopes entre complexes de groupes abéliens alors les morphismes induits en homologie $f_*, g_* : C_* \rightarrow D_*$ sont les mêmes.

Prop. 4.11 Soient $f, g : K \rightarrow L$ deux morphismes contiguës entre complexes simpliciaux alors les morphismes induits $f_*, g_* : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$ sont homotopes.

Cas particulier : on considère $K = L = \Delta[n]$ (le complexe simplicial abstrait formé de l'ensemble des parties non vides de $\{0, \dots, n\}$), $f = \text{id}$ et g est le morphisme qui envoie tous les sommets de $\Delta[n]$ sur le sommet 0. Les morphismes f et g sont contiguës. La conclusion du théorème est que les morphismes $H_*(f) = \text{id}$ et $H_*(g)$ sont les mêmes. Le morphisme g s'écrit comme la composée $g_1 \circ g_0$ où g_0 est l'unique morphisme $\Delta[n] \rightarrow \text{pt}$ et où $g_1 : \text{pt} \rightarrow \Delta[n]$ est l'inclusion qui envoie l'unique sommet de pt sur le sommet 0 de $\Delta[n]$. On a $H_*(g_0) \circ H_*(g_1) = H_*(g_0 g_1) = \text{id}$ et $H_*(g_1) \circ H_*(g_0) = H_*(g)$. L'affirmation $H_*(g) = \text{id}$ permet de conclure que $H_*(g_0)$ et $H_*(g_1)$ sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Plutôt que de déduire l'égalité $H_*(g) = \text{id}$ du théorème, on procède dans l'ordre inverse : on démontre la proposition 4.11 dans ce cas particulier et on en déduit la proposition dans le cas général donc le théorème comme expliqué plus haut.

Démonstration de la proposition 4.11 dans le cas $K = L = \Delta[n]$, $f = \text{id}$, $g \equiv 0$.

On définit $H : C_k(\Delta[n]) \rightarrow C_{k+1}(\Delta[n])$ par

$$\begin{aligned} H([A_0, \dots, A_k]) &= [0, A_0, \dots, A_k] \text{ si } 0 \notin \{A_0, \dots, A_k\} \text{ (bien défini !)} \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Pour $k = 0$ on a $(f_* - g_*)([A]) = [A] - [0]$ et $(dH + Hd)([A]) = dH([A])$ qui vaut 0 si $A = 0$, $d[0, A] = [A] - [0]$ si $A \neq 0$.

Pour $k > 0$ on a $(f_* - g_*)([A_0, \dots, A_k]) = [A_0, \dots, A_k]$ et si $0 \notin \{A_0, \dots, A_k\}$ alors

$$\begin{aligned} (dH + Hd)([A_0, \dots, A_k]) &= d[0, A_0, \dots, A_k] + H\left(\sum_{i=0}^k (-1)^i [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]\right) \\ &= [A_0, \dots, A_k] + \sum_{i=0}^k (-1)^{i+1} [0, A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k] \\ &\quad + \sum_{i=0}^k (-1)^i H([A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]) \\ &= [A_0, \dots, A_k] \end{aligned}$$

car $H([A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]) = [0, A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]$.

Si $0 = A_{i_0}$ alors

$$\begin{aligned} (dH + Hd)([A_0, \dots, A_k]) &= H\left(\sum_{i=0}^k (-1)^i [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]\right) \\ &= (-1)^{i_0} H([A_0, \dots, \hat{A}_{i_0}, \dots, A_k]) \\ &= (-1)^{i_0} [0, A_0, \dots, \hat{A}_{i_0}, \dots, A_k] \\ &= [A_0, \dots, A_k] \end{aligned}$$

car la permutation $(0, i_0)$ de $\{0, \dots, k\}$ est de signature $(-1)^{i_0}$.

On obtient :

Prop. 4.12 Le morphisme $\Delta[n] \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration de la proposition 4.11 dans le cas général.

Pour σ un simplexe de K ou de L on note $C_*(\sigma)$ le sous-complexe de $C_*(K)$ (ou de $C_*(L)$) engendré par les simplexes orientés dont le simplexe sous-jacent est une face de σ (y compris σ !). Soit n la dimension de σ . Il existe un isomorphisme de $\Delta[n]$ dans le sous-complexe simplicial de K formé des faces de σ . En particulier l'homologie de $C_*(\sigma)$ est égale à l'homologie du point.

Par hypothèse sur f et g il existe pour tout simplexe σ de K un simplexe τ_σ de L tel que $S_{\tau_\sigma} = f(S_\sigma) \cup g(S_\sigma)$ (τ_σ est déterminé par ses sommets donc est unique). La restriction de $f_* - g_*$ à $C_*(\sigma)$ est alors à valeur dans $C_*(\tau_\sigma)$.

On choisit une base de $C_k(K)$ formée de k -simplexes orientés en fixant un ordre total sur les sommets de K . La donnée de $H : C_k(K) \rightarrow C_{k+1}(L)$ équivaut alors à la donnée des éléments $H([A_0, \dots, A_k])$ de $C_{k+1}(L)$, $[A_0, \dots, A_k]$ décrivant les k -simplexes orientés de K avec $A_0 < \dots < A_k$.

On définit H sur $C_k(K)$ par récurrence sur k sous les deux conditions suivantes :

$$(R) \quad (dH + Hd) = f_* - g_*.$$

$$(loc) \quad \forall \sigma \in K, \quad H(C_k(\sigma)) \subset C_{k+1}(\tau_\sigma).$$

Pour $k = 0$ et $[A]$ un 0-simplexe orienté de K on a $f(A) = g(A)$ ou $\{f(A), g(A)\}$ est un 1-simplexe de L . On pose $H([A]) = [g(A), f(A)]$ si $f(A) \neq g(A)$, $H([A]) = 0$ sinon. Les conditions (R) et (loc) sont bien vérifiées.

Soit maintenant $k > 0$ et supposons H défini sur les $C_i(K)$, $i < k$, vérifiant (R) et (loc). Soit $[A_0, \dots, A_k]$, $A_0 < \dots < A_k$ un vecteur de base de $C_k(K)$ et notons τ le simplexe de L dont les sommets sont les éléments de $\{f(A_0), \dots, f(A_k), g(A_0), \dots, g(A_k)\}$.

On veut définir $H([A_0, \dots, A_k])$ vérifiant $H([A_0, \dots, A_k]) \in C_{k+1}(\tau)$ (loc) et

$$dH([A_0, \dots, A_k]) = (f_* - g_* - Hd)([A_0, \dots, A_k]) \quad (R)$$

(La restriction de d à $C_k(K)$ est à valeurs dans $C_{k-1}(K)$ donc la composée Hd est définie sur $C_k(K)$.)

Une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir définir H est que $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \dots, A_k])$ soit un bord dans $C_k(L)$. Ceci ne peut avoir lieu que si $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \dots, A_k])$ est un cycle, ce qu'on vérifie :

On calcule

$$\begin{aligned} d(f_* - g_* - Hd) &= df_* - dg_* - dHd = f_*d - g_*d - (f_* - g_* - Hd)d \\ &\quad \text{car } f_* \text{ et } g_* \text{ sont des morphismes de complexes et } H \text{ vérifie (R)} \\ &= Hdd = 0 \\ &\quad (d \text{ est une différentielle}). \end{aligned}$$

Donc $d(f_* - g_* - Hd)$ est le morphisme nul. A fortiori $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \dots, A_k])$ est un cycle.

L'élément $(f_* - g_*)([A_0, \dots, A_k])$ est dans $C_k(\tau)$ (avec la définition de τ donnée plus haut) et pour chaque $i \in \{0, \dots, k\}$, $H([A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]) \in C_k(\tau_{\{A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k\}}) \subset C_k(\tau)$ puisque la restriction de H à $C_{k-1}(K)$ vérifie la condition (loc) et puisque $\tau_{\{A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k\}}$ est une face de τ . Donc $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \dots, A_k])$ est dans $C_k(\tau)$. On a $H_k(C_k(\tau)) \simeq H_k(\text{pt}) = \{0\}$ d'après la discussion plus haut donc tout cycle de $C_k(\tau)$ est le bord d'un élément de $C_{k+1}(\tau)$. Ceci permet de définir $H([A_0, \dots, A_k])$ vérifiant (R) et (loc). □

La démonstration de la proposition 4.11 conduit à l'énoncé plus complet suivant appelé théorème des modèles acycliques :

Théorème 4.13 Soit K, L deux complexes simpliciaux. On suppose donné pour chaque simplexe σ de K un sous-complexe simplicial $\Phi(\sigma)$ de L vérifiant :

- ⎧ L'application $\Phi(\sigma) \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie.
- ⎩ Si τ est une face de σ alors $\Phi(\tau) \subset \Phi(\sigma)$

Alors il existe un morphisme de complexes de groupes abéliens $\phi : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$ vérifiant

$$\phi([A_0, \dots, A_k]) \in \Phi(\{A_0, \dots, A_k\})$$

pour tout simplexe orienté $[A_0, \dots, A_k]$ de K et deux tels morphismes sont homotopes.

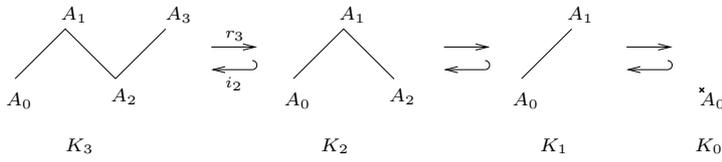
Un morphisme de complexes $\phi : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$ vérifiant $\phi([A_0, \dots, A_k]) \in \Phi(\{A_0, \dots, A_k\})$ pour tout simplexe orienté $[A_0, \dots, A_k]$ est dit **porté par Φ** .

Application au calcul de l'homologie d'un complexe simplicial

Soit L un complexe simplicial et $K \subset L$ un sous-complexe. On dit que K est un **retract** de L s'il existe une application simpliciale $r : L \rightarrow K$ telle que la composée de r avec l'inclusion $i : K \hookrightarrow L$ est le morphisme identité de K . On dit que K est un **retract par déformation contiguë de L** s'il existe une application simpliciale $r : L \rightarrow K$ vérifiant $r \circ i = \text{id}$ et $i \circ r$ est contiguë à id_L .

Corollaire 4.14 Si $K \subset L$ est un retract par déformation contiguë de L alors l'inclusion $K \rightarrow L$ induit un isomorphisme en homologie d'inverse le morphisme induit par la retraction.

Ex. 1) Posons $K_0 = \text{pt}$ et pour $n \geq 1$ notons K_n le complexe simplicial formé des simplexes $\{i, i+1\}$, $0 \leq i < n$ (ligne brisée). Soient i_n l'inclusion $K_n \rightarrow K_{n+1}$ et $r_{n+1} : K_{n+1} \rightarrow K_n$ l'application simpliciale donnée par $A_{n+1} \mapsto A_n$ et $A_i \mapsto A_i$ si $0 \leq i \leq n$.

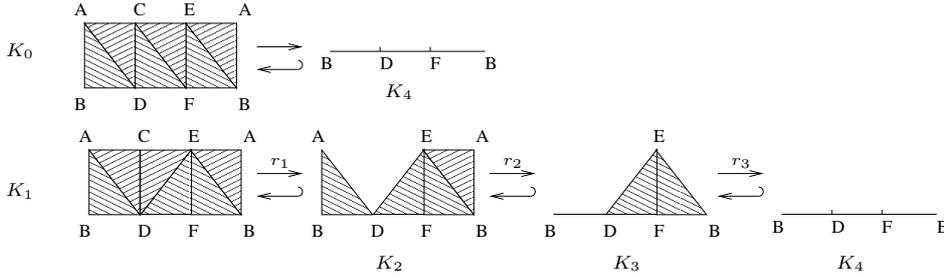


Alors $r_{n+1}i_n = \text{id}_{K_n}$ et $i_n r_{n+1}$ est contiguë à $\text{id}_{K_{n+1}}$ de sorte que K_n est un retract par déformation contiguë de K_{n+1} . On en déduit

$$H_*(K_n) \simeq H_*(K_{n-1}) \simeq \dots \simeq H_*(K_0) = H_*(\text{pt}) .$$

Observons que K_0 est un retract de K_n mais n'en est pas un retract par déformation contiguë pour $n \geq 2$. Ceci illustre le fait que la relation de contiguïté entre applications simpliciales n'est pas transitive.

2) On considère les deux triangulations K_0 et K_1 du cylindre (figure ci-dessous). r_1 est l'application simpliciale $C \mapsto D$, identité sur les autres sommets. r_2 est l'application simpliciale $A \mapsto B$, identité sur les autres sommets. r_3 est l'application simpliciale $E \mapsto F$, identité sur les autres sommets.



Pour $1 \leq i \leq 3$, les composées $\text{incl} \circ r_i$ sont contiguës à id_{K_i} donc K_{i+1} est un retract par déformation contiguë de K_i . L'inclusion $K_4 \rightarrow K_1$ induit donc un isomorphisme en homologie. On reconnaît $K_4 \simeq \partial\Delta[2]$ dont on a calculé l'homologie plus haut.

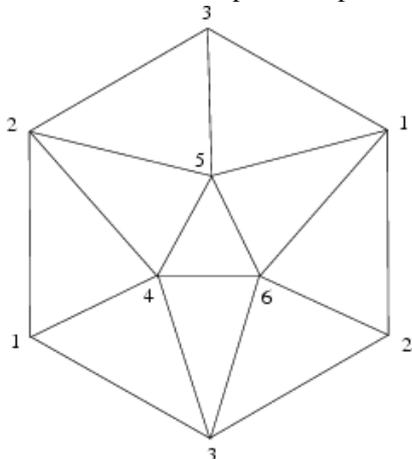
K_4 est un retract de K_0 mais on ne sait pas passer par déformation contiguë de K_0 à K_4 . Tout ce qu'on peut dire est que $H_*(K_4)$ est un retract de $H_*(K_0)$, en particulier que $H_1(K_0)$ n'est pas le groupe nul.

Calcul de l'homologie d'une triangulation de \mathbb{RP}^2 avec GP/PARI

Documentation en ligne de GP/PARI, et cette page pour des manuels, tutoriels, etc. Un script gp/pari peut être exécuté ici ou là.

Forme normale des matrices à coefficients entiers : voir par exemple cette page.

On considère le complexe simplicial formé des 2-simplexes et de leurs faces représenté ci-dessous :



(Ce complexe est une triangulation du plan projectif réel.) On oriente chaque simplexe de ce complexe par la numérotation indiquée des sommets du complexe. On définit dans GP/PARI les bases des groupes des 0-chaînes, 1-chaînes et 2-chaînes et les matrices des opérateurs de bord d_1 et d_2 (cf [Munkres, Elements of Algebraic Topology, chap. 1] pour une définition de ces objets). On utilise la fonction matsnf de GP/Pari pour obtenir une forme normale des matrices des opérateurs avec les matrices de changement de bases. On en déduit immédiatement une description des groupes d'homologie du complexe simplicial.

```
GP/PARI CALCULATOR Version 2.3.0 (released)
i686 running linux (ix86/GMP-4.1.4 kernel) 32-bit version
compiled: May 26 2006, gcc-4.1.0 20060304 (Red Hat 4.1.0-3)
(readline v5.0 enabled, extended help available)
```

Copyright (C) 2000-2006 The PARI Group

PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and comes WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.

Type ? for help, \q to quit.

Type ?12 for how to get moral (and possibly technical) support.

```
parisize = 4000000, primelimit = 500000
```

```
? /* Bases des 0-simplexes, 1-simplexes orientés, 2-simplexes orientés de  $\mathbb{RP}^2$  */
? U=[1,2,3,4,5,6];
? V=[[1,2],[1,3],[2,3],[1,4],[2,4],[2,5],[3,5],[1,5],[1,6],[2,6],[3,6],[3,4],[4,5],[5,6],[4,6]];
? W=[[1,2,4],[2,4,5],[2,3,5],[1,3,5],[1,5,6],[1,2,6],[2,3,6],[3,4,6],[1,3,4],[4,5,6]];
```

```
? /* Matrice de  $d_1$  */
```

```
? ind(v,V)=local(i);i=1;while(V[i]<>v,i++);i /* Position de v dans V */
```

```
? A=matrix(6,15);
```

```
? for (i=1,15,A[V[i][2],i]=1;A[V[i][1],i]=-1);A /* matrice de l'opérateur de bord  $d_1$  */
```

```
%5 =
```

```
[-1 -1 0 -1 0 0 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0]
```

```
[1 0 -1 0 -1 -1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0]
```

```
[0 1 1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 -1 0 0 0]
```

```
[0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 -1 0 -1]
```

```

[0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 -1 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1]

? /* rendu TeX de A */
? system("rm -f A.tex");writetex("A.tex",A);system("tex2im -r 100x100 -f gif -o A.gif A.tex");

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$


? /* forme normale de Smith */
? ?matsnf
matsnf(x,{flag=0}): Smith normal form (i.e. elementary divisors) of the matrix x, expressed
as a vector d. Binary digits of flag mean 1: returns [u,v,d] where d=u*x*v, otherwise only
the diagonal d is returned, 2: allow polynomial entries, otherwise assume x is integral, 4:
removes all information corresponding to entries equal to 1 in d.

? M=matsnf(A,1);
? M[3]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]

? /* Conclusion : le noyau de d_1 est de dim 10 ; l'image de d_1 est un facteur direct de C_0 de
dimension 5 */
? writetex("M2.tex",M[2]);system("tex2im -r 100x100 -f gif -o M2.gif M2.tex");

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


? ker=vecextract(M[2],"1..10");A*ker /* Les 10 premières colonnes de M[2] forment la matrice des
coordonnées d'une base du noyau de d_1 ; vérification : */
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

? /* matrice de d_2 */
? B=matrix(15,10);B=matrix(15,10);{for (j=1,10,B[ind(vecextract(W[j],[2,3]),V),j]=1;
B[ind(vecextract(W[j],[1,3]),V),j]=-1; B[ind(vecextract(W[j],[1,2]),V),j]=1);}

```

```
? writetex("B.tex",B);system("tex2im -r 100x100 -f gif -o B.gif B.tex");
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
? BB=M[2]^(-1)*B; /* Matrice de d_2 relativement à la nouvelle base de C_1 */
```

```
? writetex("BB.tex",BB);system("tex2im -r 100x100 -f gif -o BB.gif BB.tex");
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
? /* d_2 est bien à valeurs dans ker(d_1) ! */
```

```
? BBB=vecextract(BB,"1..10","1..10"); /* 10 premières lignes et les 10 colonnes de BB */
```

```
? N=matsnf(BBB,1); /* mise sous forme normale */
```

```
? writetex("N3.tex",N[3]);system("tex2im -r 100x100 -f gif -o N3.gif N3.tex");
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
? /* Conclusion : ker(d_2)={0} ; im(d_2) est de dimension 10=dim(ker(d_1)) mais n'est pas un facteur direct de ker(d_1); ker(d_1)/im(d_2)=Z/2Z */
```

F.X. Dehon, 11 décembre 2008, dehon@unice.fr

5. La suite exacte de Mayer-Vietoris - I

Suite exacte de groupes abéliens

On note communément 0 le groupe abélien nul $\{0\}$.

Déf. Soient A, B, C des groupes abéliens et $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ des homomorphismes. On dit que la suite $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est **exacte** si le noyau de g est égal à l'image de f .

On dit qu'une suite longue de groupes abéliens et d'homomorphismes

$$\cdots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_{n+2} \rightarrow \cdots$$

(éventuellement de longueur infinie) est exacte si toutes les sous-suites $A_n \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_{n+2}$ sont exactes.

Une suite exacte de la forme $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ est appelée **suite exacte courte**.

Si C_* est un complexe de groupes abéliens, il revient au même de dire que la suite $\cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ est exacte ou que l'homologie du complexe C_* est nulle en chaque degré.

Lemme 5.1 1) Une suite $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ est exacte ssi f est injective.

2) une suite $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ est exacte ssi f est surjective.

3) Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ une suite exacte ; alors g induit un isomorphisme de $\text{coker}(f) = B/\text{im}(f)$ sur $\text{ker}(h)$.

Suite exacte courte de complexes de groupes abéliens et suite exacte longue en homologie

Déf. Soient A_*, B_*, C_* des complexes de groupes abéliens et $f_* : A_* \rightarrow B_*, g_* : B_* \rightarrow C_*$ des morphismes de complexes. On dit que la suite

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0$$

est une **suite exacte courte de complexes de groupes abéliens** si pour chaque entier n la suite de groupes abéliens $0 \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow 0$ est exacte.

Par functorialité f_* et g_* induisent en homologie la suite de morphismes $H_*(A) \rightarrow H_*(B) \rightarrow H_*(C)$ dont la composée est nulle puisque c'est le morphisme induit en homologie par le morphisme nul.

Soit $0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0$ une suite exacte courte de complexes. On construit pour chaque entier n un homomorphisme $\partial_n : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$, appelé **connectant**, comme suit :

Soit $x \in H_n(C)$. On choisit un cycle c représentant x . c est défini modulo le sous-groupe $d(C_{n+1})$ de C_n . Puisque $g_n : B_n \rightarrow C_n$ est surjective, il existe un élément $b \in B_n$ d'image c par g_n . b est défini modulo le sous-groupe $g_n^{-1}(dC_{n+1}) = dB_{n+1} + f_n(A_n)$ de B_n , donc $d(b) \in B_{n-1}$ est défini modulo le sous-groupe $df_n(A_n) = f_n(dA_n)$. On a $g_{n-1}(db) = dc = 0$ donc db est dans l'image de f_{n-1} : il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(a) = db$. a est défini modulo dA_{n-1} puisque f est injective et puisque db est défini modulo $f_n(dA_n)$. a est un cycle de A_{n-1} car $f_{n-1}(da) = ddb = 0$ et f est injective. On définit $\partial_n(x)$ comme la classe de a dans $H_{n-1}(A)$. ∂_n ainsi défini est un homomorphisme de groupes $H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$.

L'homomorphisme ∂_n est naturel en la suite $0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0$: Si on a un diagramme commutatif de complexes de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_* & \xrightarrow{f_*} & B_* & \xrightarrow{g_*} & C_* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* \\ 0 & \longrightarrow & A'_* & \xrightarrow{f'_*} & B'_* & \xrightarrow{g'_*} & C'_* \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1)$$

où les suites horizontales sont exactes, alors pour tout entier n le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_n(C) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A) \\ \downarrow H_n(\gamma) & & \downarrow H_{n-1}(\alpha) \\ H_n(C') & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A') \end{array}$$

est également commutatif.

Prop. 5.2 La suite de groupes abéliens et d'homomorphismes

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbb{H}_n(A) \xrightarrow{\mathbb{H}_n(f)} \mathbb{H}_n(B) \xrightarrow{\mathbb{H}_n(g)} \mathbb{H}_n(C) \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{\mathbb{H}_{n-1}(f)} \mathbb{H}_{n-1}(B) \rightarrow \dots \\ \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{H}_0(A) \xrightarrow{\mathbb{H}_0(f)} \mathbb{H}_0(B) \xrightarrow{\mathbb{H}_0(g)} \mathbb{H}_0(C) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

est exacte.

On l'appelle la **suite exacte longue en homologie** associée à la suite exacte courte de complexes $0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0$.

Comparaison de suite exactes longues – le lemme des cinq

Lemme 5.3 (dit “lemme des cinq”) Soit

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

un diagramme commutatif de groupes abéliens. Si les homomorphismes f_1, f_2, f_4, f_5 sont des isomorphismes alors f_3 est également un isomorphisme.

Corollaire 5.4 Considérons le diagramme commutatif de complexes de groupes abéliens (1) donné plus haut, où les suites horizontales sont exactes. Si deux des morphismes $\alpha_*, \beta_*, \gamma_*$ induisent un isomorphisme en homologie alors il en est de même du troisième.

Paire de sous-complexes d'un complexe simplicial et suite exacte de Mayer-Vietoris

Soient K, K' deux sous-complexes d'un complexe simplicial L , alors $K \cup K'$ est un sous-complexe simplicial de L contenant K et K' ; $K \cap K'$ est un sous-complexe simplicial de L contenu dans K et dans K' . On note i, j, p, q les inclusions $K \cap K' \rightarrow K, K \cap K' \rightarrow K', K \rightarrow K \cup K'$ et $K' \rightarrow K \cup K'$ respectivement.

On note $C_*(K) \oplus C_*(K')$ le complexe formé en chaque degré n par la somme directe $C_n(K) \oplus C_n(K')$ muni de la différentielle $(x, x') \mapsto (dx, dx')$. L'homologie de ce complexe est degré par degré la somme directe des homologies de K et de K' .

Prop. 5.5 La suite de complexes de groupes abéliens

$$0 \rightarrow C_*(K \cap K') \xrightarrow{(i_*, j_*)} C_*(K) \oplus C_*(K') \xrightarrow{(p_*, -q_*)} C_*(K \cup K') \rightarrow 0$$

est exacte.

(i_*, j_*) est le morphisme $x \mapsto (i_*(x), j_*(x))$; $(p_*, -q_*)$ est le morphisme $(x, x') \mapsto p_*(x) - q_*(x')$.

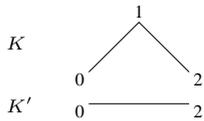
Déf. On appelle **suite exacte de Mayer-Vietoris** la suite exacte longue en homologie associée à cette suite exacte courte de complexes :

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbb{H}_n(K \cap K') \xrightarrow{(\mathbb{H}_n(i), \mathbb{H}_n(j))} \mathbb{H}_n(K) \oplus \mathbb{H}_n(K') \xrightarrow{(\mathbb{H}_n(p), -\mathbb{H}_n(q))} \mathbb{H}_n(K \cup K') \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{H}_{n-1}(K \cap K') \rightarrow \\ \dots \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{H}_0(K \cap K') \xrightarrow{(\mathbb{H}_0(i), \mathbb{H}_0(j))} \mathbb{H}_0(K) \oplus \mathbb{H}_0(K') \xrightarrow{(\mathbb{H}_0(p), -\mathbb{H}_0(q))} \mathbb{H}_0(K \cup K') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Comparaison : Soient L_0 et L_1 des complexes simpliciaux, K_0, K'_0 des sous-complexes de L_0 , K_1, K'_1 des sous-complexes de L_1 et $f : L_0 \rightarrow L_1$ une application simpliciale telle que $f(K_0) \subset K_1$ et $f(K'_0) \subset K'_1$. On écrira $f : (L_0, K_0, K'_0) \rightarrow (L_1, K_1, K'_1)$.

Prop. 5.6 Soit $f : (L_0, K_0, K'_0) \rightarrow (L_1, K_1, K'_1)$ une application simpliciale. On suppose que les restrictions de $f : K_0 \cap K'_0 \rightarrow K_1 \cap K'_1, K_0 \rightarrow K'_0$ et $K_1 \rightarrow K'_1$ induisent des isomorphismes en homologie ; alors il en est de même de l'application $f : K_0 \cup K'_0 \rightarrow K_1 \cup K'_1$.

Ex. 1) $L = \partial\Delta[2]$, K est le sous-complexe de L formé des simplexes $\{0, 1\}, \{1, 2\}$ et de leurs faces ; K' est le sous-complexe de L formé du simplexe $\{0, 2\}$ et de ses faces. On a $L = K \cup K', K \cap K' = \{\{0\}, \{2\}\}$ réunion disjointe de deux points.



Le sous-complexe de K formé du seul sommet 0 est un retract par déformation contiguë du sous-complexe de K formé du simplexe $\{0, 1\}$ et de ses faces, lequel est un retract par déformation contiguë de K , donc l'application $K \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie. On montre de même que l'application $K' \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie.

On a $H_0(K \cap K') \simeq \mathbb{Z}^{\{[0],[2]\}}$ (le groupe abélien libre engendré par $[0]$ et $[1]$) ; $H_n(K \cap K') = 0$ si $n > 0$ puisque les simplexes de $K \cap K'$ sont de dimension 0 .

$H_n(K) \simeq H_n(K') \simeq H_n(\text{pt}) = 0$ si $n > 0$; $H_0(K) \rightarrow H_0(\text{pt}) = \mathbb{Z}$ est iso, de même que $H_0(K') \rightarrow H_0(\text{pt}) = \mathbb{Z}$.

Via ces isomorphismes, $H_0(i)$ est l'homomorphisme donné par $[0] \mapsto 1, [2] \mapsto 1$ et $H_0(j)$ est l'homomorphisme donné par $[0] \mapsto 1, [2] \mapsto 1$ puisque le diagramme $K \cap K' \rightarrow K$ commute.



La suite exacte de Mayer-Vietoris se réduit aux suites exactes $0 \rightarrow H_n(L) \rightarrow 0$ pour $n > 1$ et

$$0 \rightarrow H_1(L) \rightarrow \mathbb{Z}^{\{[0],[2]\}} \xrightarrow{(H_0(i), H_0(j))} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_0(L) \rightarrow 0$$

L'homomorphisme $(H_0(i), H_0(j))$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{Z}^{\{[0],[2]\}}$ et de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Son noyau est le sous-groupe de $\mathbb{Z}^{\{[0],[2]\}}$ engendré par $[0] - [1]$, son image est le sous-groupe de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ engendré par $(1, 1)$, lequel admet le sous-groupe engendré par $(1, 0)$ pour supplémentaire.

On obtient ainsi $H_1(L) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_0(L) \simeq \mathbb{Z}$.

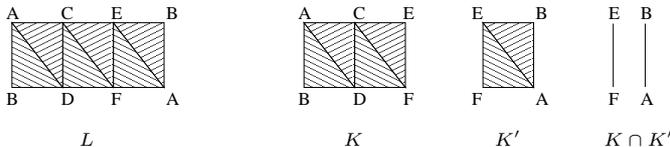
2) Soit $P_n, n \geq 3$, le complexe simplicial formé des 1-simplexes $\{0, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{n-2, n-1\}, \{n-1, 0\}$ et de leurs faces. (P_n est le complexe simplicial abstrait associé au polygone convexe à n -côtés ; $P_3 \simeq \partial\Delta[2]$.)

On note K_n le sous-complexe de P_n formé des simplexes $\{0, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{n-2, n-1\}$ (ligne brisée) et K'_n le sous-complexe formé du simplexe $\{0, n-1\}$.

On considère l'application simpliciale $f_n : P_n \rightarrow P_3, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1$ et $k \mapsto 2$ pour $2 \leq k \leq n-1$. Elle envoie K_n sur K_3 et est un isomorphisme de K'_n sur K'_3 comme de $K_n \cap K'_n$ sur $K_3 \cap K'_3$ donc induit des isomorphismes en homologie $H_*(K'_n) \rightarrow H_*(K'_3)$ et $H_*(K_n \cap K'_n) \rightarrow H_*(K_3 \cap K'_3)$. Par ailleurs il existe une suite de retracts par déformation contiguë partant de K_n aboutissant au sous-complexe $\{0\} \simeq \text{pt}$ de P_n donc l'application $K_n \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie.

On en déduit avec la proposition 5.6 que $H_*(f_n) : H_*(P_n) \rightarrow H_*(P_3)$ est un isomorphisme. Avec les calculs faits en 1) on obtient $H_k(P_n) \simeq \mathbb{Z}$ si $k = 0, 1$ et $H_k(P_n) = 0$ si $k > 1$.

3) Homologie de la triangulation L donnée ci-dessous du cylindre



On considère l'application simpliciale $f : L \rightarrow P_3$ donnée par $A, B \mapsto 0, C, D \mapsto 1, E, F \mapsto 2$; alors f envoie K sur K_3 et K' sur K'_3 avec les notations de l'exemple 2 ci-dessus. On observe que K_3, K'_3 et $K_3 \cap K'_3$ s'identifient à des retracts par déformations contiguës de K, K' et $K \cap K'$ de façon compatible avec f . La proposition 5.6 montre alors que $H_*(f) : H_*(L) \rightarrow H_*(P_3)$ est un isomorphisme (alors qu'il n'y a pas de déformation contiguë de L sur P_3).

Généralisation : somme amalgamée de complexes simpliciaux et suite exacte de Mayer-Vietoris

Prop. 5.7 Soient K, L, M des complexes simpliciaux et $f : K \rightarrow L, g : K \rightarrow M$ des applications simpliciales. On suppose que f est injective et que la condition (ii) du lemme 2.2 est satisfaite, alors la suite de complexes de groupes abéliens

$$0 \rightarrow C_*(K) \xrightarrow{(f_*, g_*)} C_*(L) \oplus C_*(M) \xrightarrow{(p_*, -q_*)} C_*(L \cup_K M) \rightarrow 0$$

est exacte, où (p, q) est la projection $L \sqcup M \rightarrow L \cup_K M$.

Sous les hypothèses de la proposition on en déduit une suite exacte longue en homologie qu'on appelle la **suite exacte de Mayer-Vietoris** du diagramme $L \leftarrow K \rightarrow M$.

Ex. Calculer l'homologie de la bouteille de Klein.

6. Approximation simpliciale

Soit K un complexe simplicial fini abstrait ou dans un evn E . Si K est abstrait on pose $E = \mathbb{R}^{S_K}$ muni de la structure euclidienne canonique. L'espace topologique sous-jacent à K , noté $|K|$, est la réunion dans E des enveloppes convexes des ensembles de sommets S_σ , σ décrivant K .

Etoile d'un sommet

Si σ est un simplexe de K on note $|\sigma|$ l'espace topologique sous-jacent à σ (l'enveloppe convexe de S_σ dans E) et $|\overset{\circ}{\sigma}|$ (l'**intérieur** de σ) les éléments de $|\overset{\circ}{\sigma}|$ dont les coordonnées barycentriques par rapport aux sommets de σ sont strictement positives. (La partie $|\overset{\circ}{\sigma}|$ de $|K|$ n'est ouverte pour la topologie de $|K|$ que si σ n'est pas une face stricte d'un simplexe de K .)

Lemme 6.1 Soit x un élément de $|K|$ alors il existe un unique simplexe σ de K tel que $x \in |\overset{\circ}{\sigma}|$.

Déf. Pour $A \in S_K$ on note $\text{St}(A)$ l'ensemble $\{\sigma \in K, A \in S_\sigma\}$ et on l'appelle l'**étoile** de A .

On note $|\overset{\circ}{\text{St}A}|$ la réunion des $|\overset{\circ}{\sigma}|$, σ décrivant $\text{St}(A)$, qu'on appelle l'**intérieur de l'étoile** de A .

Lemme 6.2 1) $|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$ est une partie ouverte de $|K|$ contenant A .

2) La famille $(|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|)_{A \in S_K}$ est un recouvrement ouvert (fini) de $|K|$.

Démonstration. $|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$ est le complémentaire dans $|K|$ de la réunion (finie) des simplexes $|\sigma|$ ne contenant pas A . Or un simplexe dans E est fermé dans E donc fermé dans $|K|$, donc $|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$ est ouvert. Soit x un élément de $|K|$. D'après le lemme 6.1 il existe un simplexe σ de K tel que $x \in |\overset{\circ}{\sigma}|$. Soit A un sommet de σ . On a $\sigma \in \text{St}(A)$ donc $|\overset{\circ}{\sigma}| \subset |\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$ donc $x \in |\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$. \square

Approximation simpliciale – 1er pas

Soient K, L des complexes simpliciaux et $g : |K| \rightarrow |L|$ une application (d'ensembles). On dit que g vérifie la condition (*) relativement à K et L si

$$(*) \quad \forall A \in S_K, \exists B \in S_L \text{ tel que } g(|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|) \subset |\overset{\circ}{\text{St}(B)}| .$$

Ex. Soit $f : K \rightarrow L$ une application simpliciale alors $f(\text{St}(A)) \subset \text{St}(f(A))$ et pour tout simplexe $\sigma \in K$, $|f|(|\overset{\circ}{\sigma}|) = |f(\overset{\circ}{\sigma})|$. On en déduit que $|f|$ vérifie la condition (*).

Prop. 6.3 Soit $g : |K| \rightarrow |L|$ une application.

(a) Soit f une application $S_K \rightarrow S_L$ vérifiant

$$(**) \quad \forall A \in S_K, g(|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|) \subset |\overset{\circ}{\text{St}(f(A))}| .$$

Alors f est une application simpliciale $K \rightarrow L$.

(b) Soient $f, f' : K \rightarrow L$ deux applications simpliciales vérifiant la condition (**) ci-dessus ; alors f et f' sont contiguës.

Démonstration. (a) Soit $\sigma \in K$ et choisissons $x \in |\overset{\circ}{\sigma}|$ (on peut prendre pour x l'isobarycentre des sommets de σ dans E). D'après le lemme 6.1 il existe un unique simplexe $\tau \in L$ tel que $g(x) \in |\overset{\circ}{\tau}|$. Pour tout sommet A de σ on a $x \in |\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$ donc $g(x) \in |\overset{\circ}{\text{St}(f(A))}|$ donc il existe $\tau' \in \text{St}(f(A))$ tel que $g(x) \in |\overset{\circ}{\tau'}|$. Par unicité de τ on a $\tau = \tau'$ en particulier $f(A)$ est un sommet de τ . On en déduit $f(S_\sigma) \subset S_\tau$ donc f est une application simpliciale. Si f' est une application $S_K \rightarrow S_L$ vérifiant également (**) alors $f'(S_\sigma) \subset S_\tau$ donc $f(S_\sigma) \cup f'(S_\sigma) \subset S_\tau$ donc f et f' sont contiguës. \square

Déf. Soient K, L des complexes simpliciaux et $g : |K| \rightarrow |L|$ une application. Une application simpliciale $f : K \rightarrow L$ vérifiant (**) s'appelle une **approximation simpliciale** de g relative à K et L .

Rq. 1) $g : |K| \rightarrow |L|$ étant fixé, l'existence de $f : S_K \rightarrow S_L$ vérifiant la condition (**) équivaut à la condition (*) sur g relativement à K et L .

2) Si $f : K \rightarrow L$ est une application simpliciale alors f est la seule approximation simpliciale de $|f|$ relative à K et L . En particulier si f' est une application simpliciale contiguë à f mais distinct de f alors f' n'est pas une approximation simpliciale de $|f|$ relative à K et L .

Prop. 6.4 Soient K, L, M des complexes simpliciaux, $g : |K| \rightarrow |L|$ une application admettant une approximation simpliciale $f : K \rightarrow L$ et $g' : |L| \rightarrow |M|$ une application admettant une approximation simpliciale $f'L \rightarrow M$. Alors la composée $f' \circ f : K \rightarrow M$ est une approximation simpliciale de $g' \circ g$.

On fixe maintenant l'espace vectoriel euclidien E dans lequel K se réalise ou est réalisé (suivant que K est donné comme complexe simplicial abstrait ou dans E). Pour P une partie bornée de E on note $\text{diam}(P)$ et on appelle **diamètre** de P le réel $\sup_{x,y \in P} \|y - x\|$.

La proposition qui suit donne une condition suffisante pour qu'une application $g : |K| \rightarrow |L|$ admette une approximation simpliciale.

Prop. 6.5 Soient K un complexe simplicial fini dans un evn E , L un complexe simplicial et $g : |K| \rightarrow |L|$ une application continue. Il existe un réel $\epsilon > 0$ (dépendant de $|K|$, L et g mais pas de la triangulation de $|K|$ dans E) tel que si tous les simplexes de K sont de diamètre inférieur à ϵ alors g admet une approximation simpliciale $K \rightarrow L$.

Démonstration. Puisque K est fini, l'espace topologique sous-jacent à K est une partie compacte de E . Or on a le :

Lemme 6.6 Soit $(U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement ouvert d'une partie compacte C de E ; alors il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que toute partie P de C de diamètre inférieur à ϵ soit dans l'un des U_α .

On applique le lemme à la famille $(g^{-1}(|\text{St}^\circ(B)|))_{B \in S_L}$ qui est un recouvrement ouvert de $|K|$ par le lemme 6.2 et parce que g est continue. Le réel ϵ obtenu dépend de L et de g .

Soient A un sommet de K et x, y deux éléments de $|\text{St}^\circ(A)|$. Soit σ , respectivement τ le simplexe de K tel que $x \in |\sigma|$, respectivement $y \in |\tau|$. A est un sommet de σ et de τ donc

$$\|y - x\| \leq \|y - A\| + \|A - x\| \leq \text{diam}(\tau) + \text{diam}(\sigma).$$

On obtient

$$\text{diam}(|\text{St}^\circ(A)|) \leq 2 \sup_{\sigma \in \text{St}(A)} \text{diam}(\sigma).$$

Supposons que les simplexes de K sont tous de diamètre inférieur à $\frac{\epsilon}{2}$; alors g vérifie la condition (*) donc admet une approximation simpliciale relativement à K et L .

□

Subdivision d'un complexe simplicial

On fixe toujours l'espace vectoriel euclidien E dans lequel se réalise ou est réalisé K .

Déf. On appelle **subdivision de K dans E** un complexe simplicial K' dans E vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall \sigma' \in K', \exists \sigma \in K, |\sigma'| \subset |\sigma| \\ \forall \sigma \in K, \bigcup_{\sigma' \in K', |\sigma'| \subset |\sigma|} |\sigma'| = |\sigma| \end{cases}$$

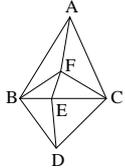
Rq. Sauf si $K = K'$, K n'est pas un sous-complexe simplicial de K' de même que K' n'est pas un sous-complexe simplicial de K .

Pour $\sigma \in K$ on note $K(\sigma)$ le sous-complexe simplicial de K formé de σ et de ses faces, et $K'(\sigma)$ le sous-complexe simplicial de K' formé des simplexes $\sigma' \in K'$ tels que $|\sigma'| \subset |\sigma|$. On observe que $K(\sigma)$ est isomorphe à $\Delta[\dim(\sigma)]$, que $K'(\sigma)$ est une subdivision de $K(\sigma)$ et que K' est la réunion des $K'(\sigma)$, σ décrivant K .

Inversement supposons donnée pour chaque simplexe σ de K une subdivision K'_σ de $K(\sigma)$ vérifiant : pour tout simplexe σ de K et toute face τ de σ on a $K'_\tau = K'_\sigma(\tau)$. Alors la réunion $\bigcup_{\sigma \in K} K'_\sigma$ est une subdivision de K .

Prop. 6.7 Soit K, K' des complexes simpliciaux dans un evn E tels que K' est une subdivision de K ; alors $|K'| = |K|$ et l'application identité $|K'| \rightarrow |K|$ admet une approximation simpliciale $i : K' \rightarrow K$ vérifiant $i(K'(\sigma)) \subset K(\sigma)$ pour tout simplexe σ de K .

Ex. K est le complexe simpliciale dans le plan euclidien formé des triangles pleins ABC, BCD et de leurs faces ; K' est le complexe simplicial formé des triangles pleins $ABF, BEF, CEF, ACF, BDE, CDE$ et de leurs faces (figure ci-dessous). Exhiber une approximation simpliciale de l'identité $|K'| \rightarrow |K|$ relativement à K' et K .



On construit maintenant une subdivision particulière de K dans E , la subdivision barycentrique :

On définit la relation stricte entre simplexes de K suivante : $\sigma \prec \tau$ si σ est une face de τ et $\dim(\sigma) < \dim(\tau)$. Pour σ un simplexe de K on note $\hat{\sigma}$ l'isobarycentre dans E des sommets de σ .

On note $\text{sb}(K)$ l'ensemble formé des enveloppes convexes dans E des ensembles de points $\{\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_n\}$ avec $n \geq 0$ et $\sigma_0 \prec \dots \prec \sigma_n$ suite strictement croissante de simplexes de K .

Prop. 6.8 (a) $\text{sb}(K)$ est une subdivision de K dans E et pour tout simplexe σ de K on a $\text{sb}(K(\sigma)) = \text{sb}(K)(\sigma)$.

(b) Pour tout simplexe σ de K et tout simplexe σ' de $\text{sb}(K(\sigma))$ on a $\text{diam}(\sigma') \leq \frac{\dim(\sigma)}{1+\dim(\sigma)} \text{diam}(\sigma)$.

(c) Pour tout simplexe σ de K le sous-complexe simplicial de $\text{sb}(K(\sigma))$ formé du seul sommet $\hat{\sigma}$ est un retract par déformation contiguë de $\text{sb}(K(\sigma))$.

Déf. On appelle $\text{sb}(K)$ la **subdivision barycentrique** de K dans E .

Le point (b) admet pour corollaire immédiat :

Corollaire 6.9 Soit K un complexe simplicial fini d'un evn E et $\epsilon > 0$ un réel ; alors il existe un entier n tel que la subdivision barycentrique itérée n -fois $\text{sb}^{\circ n}(K)$ de K dans E ait tous ses simplexes de diamètre inférieur à ϵ .

Approximation simpliciale – 2ème pas

Théorème 6.10 Soit K un complexe simplicial fini dans un evn E , L un complexe simplicial et $g : |K| \rightarrow |L|$ une application continue ; alors :

- Il existe une subdivision K' de K dans E et une application simpliciale $f : K' \rightarrow K$ qui est une approximation simpliciale de $g : |K'| = |K| \rightarrow |L|$.
- Soit $i : K' \rightarrow K$ une approximation simpliciale de l'application identité $|K'| \rightarrow |K|$ alors $H_*(i) : H_*(K') \rightarrow H_*(K)$ est un isomorphisme.
- La composée $H_*(f) \circ H_*(i)^{-1} : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ ne dépend pas des choix faits pour K', f et i .

Nous démontrerons le théorème plus loin et commençons d'abord par l'exploiter :

Déf. Soit K un complexe simplicial fini dans un evn E , L un complexe simplicial et $g : |K| \rightarrow |L|$ une application continue. On définit $H_*(g) : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ (le **morphisme induit par g en homologie**) comme la composée $H_*(f) \circ H_*(i)^{-1}$ où K' est une subdivision de K dans E , $f : K' \rightarrow K$ une approximation simpliciale de g et $i : K' \rightarrow K$ est une approximation simpliciale de l'identité $|K'| \rightarrow |K|$.

D'après le théorème un tel triplet (K', f, i) existe et la composée $H_*(f) \circ H_*(i)^{-1}$ ne dépend pas du triplet choisi.

Prop. 6.11 (a) Soient K, L des complexes simpliciaux avec K fini et $f : K \rightarrow L$ une application simpliciale ; alors $H_*(|f|) = H_*(f)$.

(b) Soit K un complexe simplicial fini alors $H_*(\text{id}_{|K|}) = \text{id}_{H_*(K)}$.

(c) Soient K, L, M des complexes simpliciaux avec K et L finis, $f : |K| \rightarrow |L|$ et $g : |L| \rightarrow |M|$ des applications continues. Alors on a

$$H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f) .$$

Démonstration. f est une approximation simpliciale de $|f| : |K| \rightarrow |L|$ et id_K est une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$ ce qui permet de calculer $H_*(|f|)$ comme la composée $H_*(f) \circ H_*(\text{id}_K)^{-1} = H_*(f)$ d'où le point (a).

Le point (b) est un cas particulier du point (a) puisque $\text{id}_{|K|} = |\text{id}_K|$.

Pour le point (c) soit $(L', \tilde{g} : L' \rightarrow M)$ tel que L' est une subdivision de L et \tilde{g} est une approximation simpliciale de g . Soit $(K', \tilde{f} : K' \rightarrow L')$ tel que K' est une subdivision de K et \tilde{f} est une approximation simpliciale de $f : |K| \rightarrow |L|$. Soit $i_K : K' \rightarrow K$, respectivement $i_L : L' \rightarrow L$, une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$, respectivement de $\text{id}_{|L|}$. Alors $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ est une approximation simpliciale de $g \circ f$ relative à K' et M et $i_L \circ \tilde{f}$ est une approximation simpliciale de f relative à K' et L .

$$\begin{array}{ccccc} |K| & \xrightarrow{f} & |L| & \xrightarrow{g} & |M| \\ \parallel & & \uparrow |i_L| & \nearrow & \\ |K| & \longrightarrow & |L'| & \xrightarrow{|\tilde{g}|} & \\ \uparrow |i_K| & \nearrow & & & \\ |K'| & \xrightarrow{|\tilde{f}|} & & & \end{array}$$

On a donc $H_*(g \circ f) = H_*(\tilde{g}) \circ H_*(\tilde{f}) \circ H_*(i_K)^{-1}$,

$$H_*(g) = H_*(\tilde{g}) \circ H_*(i_L)^{-1},$$

$$H_*(f) = H_*(i_L) \circ H_*(\tilde{f}) \circ H_*(i_K)^{-1},$$

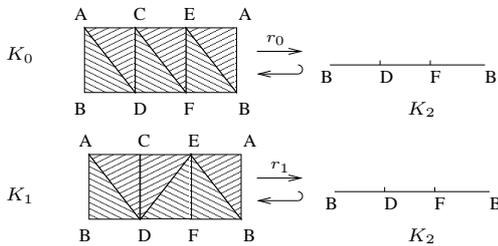
D'où le résultat.

□

Corollaire 6.12 Soient K, L deux complexes simpliciaux finis et $g : |K| \rightarrow |L|$ un homéomorphisme ; alors $H_*(g)$ est un isomorphisme d'inverse $H_*(g^{-1})$.

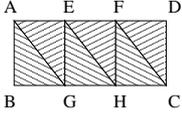
Démonstration. On a $g \circ g^{-1} = \text{id}_L$ et $g^{-1} \circ g = \text{id}_K$ donc $H_*(g) \circ H_*(g^{-1}) = \text{id}_{H_*(L)}$ et $H_*(g^{-1}) \circ H_*(g) = \text{id}_{H_*(K)}$ □

Ex. 1) On reprend les deux triangulations K_0 et K_1 du cylindre $|K_0| \simeq |K_1|$ données dans la section 3 (figure ci-dessous).



K_2 est un retract de K_0 et de K_1 et on sait que la rétraction $r_1 : K_1 \rightarrow K_0$ induit un isomorphisme en homologie. On a $|r_0| = |r_1| \circ g : |K_0| \rightarrow |K_2|$, où on a noté g l'homéomorphisme $|K_0| \rightarrow |K_1|$, donc $H_*(r_0) = H_*(r_1) \circ H_*(g)$. D'après le corollaire 6.12 $H_*(g)$ est un isomorphisme. On en conclut que $H_*(r_0)$ est un homéomorphisme.

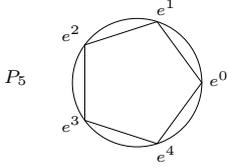
2) On note K la triangulation indiquée du rectangle plein $ABCD$ (figure ci-dessous). On note L le complexe simplicial formé du triangle plein ABC et de ses faces.



On peut construire un homéomorphisme de $|K|$ dans $|L|$ comme suit : Soit I le milieu de $[AC]$. Soit f_0 l'isomorphisme affine $ABI \rightarrow ABD$ qui envoie A sur A , B sur B et I sur D . Soit f_1 l'isomorphisme affine $BCI \rightarrow BCD$ qui envoie B sur B , C sur C et I sur D . f_0 et f_1 coïncident sur le segment $[B, I]$ donc définissent une application continue $f : |K| \rightarrow |L|$. De même les applications f_0^{-1} et f_1^{-1} coïncident sur le segment $[B, D]$ donc définissent une application continue $g : |L| \rightarrow |K|$. On vérifie que les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont les applications identité de ABC et de $ABCD$ respectivement.

D'après le corollaire, l'application $f : |K| \rightarrow |L|$ induit un isomorphisme en homologie $H_*(K) \rightarrow H_*(L)$. Or L est isomorphe au simplexe standard $\Delta[2]$ donc l'application $L \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie. L'unique application $K \rightarrow \text{pt}$, qui peut aussi s'écrire comme la composée $K \rightarrow L \rightarrow \text{pt}$, induit donc un isomorphisme en homologie.

3) Pour chaque entier $n \geq 3$ on note P_n le complexe simplicial dans \mathbb{C} formé des segments $[e^{\frac{2ik\pi}{n}}, e^{\frac{2i(k+1)\pi}{n}}]$, $0 \leq k \leq n-1$, et de leurs faces. P_3 est isomorphe à $\partial\Delta[2]$ (le bord du simplexe standard de dimension 2).



L'application $|P_n| \rightarrow S^1$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ est un homéomorphisme. Par composition on en déduit un homéomorphisme $g_n : |P_n| \rightarrow |P_3|$ donc un isomorphisme $H_*(P_n) \simeq H_*(P_3)$.

Pour quelles valeurs de n l'application g_n admet-elle une approximation simpliciale $P_n \rightarrow P_3$? L'application $g_n^{-1} : |P_3| \rightarrow |P_n|$ admet-elle une approximation simpliciale $P_3 \rightarrow P_n$?

Soit f_n l'application simpliciale $P_n \rightarrow P_3$ définie par $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mapsto e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ si $k = 0, 1, 2$ et $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mapsto e^0$ si $k \geq 3$. Peut-on déduire de ce qui précède que $H_*(f_n)$ est un isomorphisme ?

Démonstration du théorème 6.10

Le point (a) s'obtient en prenant pour K' la subdivision barycentrique itérée $\text{sb}^{on}(K)$ avec n suffisamment grand en vertu de la proposition 6.5 et du corollaire 6.9.

On commence par démontrer le point (b) dans le cas où $K' = \text{sb}(K)$ et $i : K' \rightarrow K$ est une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$ vérifiant $i(\text{sb}(K)(\sigma)) \subset K(\sigma)$ pour tout $\sigma \in K$. Un tel i existe par la proposition 6.7.

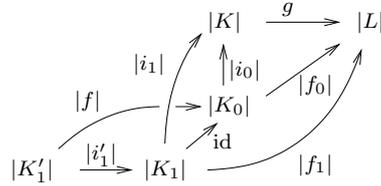
On applique le théorème des modèles acycliques (théorème 4.13) au triplet $(K, \text{sb}(K), \Phi : \sigma \mapsto \text{sb}(K)(\sigma))$: l'application $\text{sb}(K)(\sigma) \rightarrow \text{pt}$ induit bien un isomorphisme en homologie par le point (c) de la proposition 6.8. il existe donc un morphisme de complexes de groupes abéliens $\phi : C_*(K) \rightarrow C_*(\text{sb}(K))$ porté par Φ . On observe que les morphismes $i_* \circ \phi : C_*(K) \rightarrow C_*(K)$ comme $\text{id}_{C_*(K)}$ sont portés par $\sigma \mapsto K(\sigma)$ donc ils sont homotopes par le théorème des modèles acycliques (l'application $K(\sigma) \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie puisque $K(\sigma)$ est isomorphe à $\Delta[\dim(\sigma)]$). Donc $H_*(i) \circ H_*(\phi) = \text{id}_{H_*(K)}$. De même la composée $\phi \circ i_*$ tout comme $\text{id}_{C_*(\text{sb}(K))}$ est portée par $\sigma \mapsto \text{sb}(K)(\tau_\sigma)$ où τ_σ est le simplexe de K de dimension minimale telle que $|\sigma| \subset |\tau_\sigma|$; donc $H_*(\phi) \circ H_*(i) = \text{id}_{H_*(\text{sb}(K))}$. Le morphisme $H_*(i)$ est donc bien un isomorphisme.

En itérant la subdivision barycentrique on obtient pour tout entier n l'existence d'une approximation simpliciale $i_n : \text{sb}^{on}(K) \rightarrow K$ de $\text{id}_{|K|}$ telle que $H_*(i_n)$ soit un isomorphisme. Si $i : \text{sb}^{on}(K) \rightarrow K$ est une approximation simpliciale quelconque de $\text{id}_{|K|}$ alors $H_*(i)$ est encore un isomorphisme puisque deux approximations simpliciales d'une même application sont contiguës.

Soient maintenant K' une subdivision quelconque de K et $i : K' \rightarrow K$ une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$. D'après la démonstration du point (a) il existe une approximation simpliciale $j : \text{sb}^{on}(K) \rightarrow K'$ de l'identité $|K| \rightarrow |K'|$ pour un entier n convenable. La composée $i \circ j : \text{sb}^{on}(K) \rightarrow K$ est une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$ donc $H_*(i \circ j) = H_*(i) \circ H_*(j)$ est un isomorphisme. En particulier le morphisme $H_*(j)$ est injectif en chaque degré. Il existe de même une approximation simpliciale $k : \text{sb}^{om}(K') \rightarrow \text{sb}^{on}(K)$ de l'identité $|K'| \rightarrow |\text{sb}^{on}(K)|$ et la composée $j \circ k$ est une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K'|}$ donc $H_*(j) \circ H_*(k)$ est un isomorphisme et en

particulier $H_*(j)$ est surjectif en chaque degré. On en déduit que $H_*(j)$ est un isomorphisme puis que $H_*(i)$ est un isomorphisme.

Le point (c) est une conséquence des points (a) et (b) : Soient $(K_0, f_0 : K_0 \rightarrow L)$ et $(K_1, f_1 : K_1 \rightarrow L)$ deux approximations simpliciales de g . Soit $i_0 : K_0 \rightarrow K$, respectivement $i_1 : K_1 \rightarrow K$, une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$. D'après le point (a) il existe une subdivision K'_1 de K_1 et une application simpliciale $f : K'_1 \rightarrow K_0$ qui est une approximation simpliciale de l'identité $|K_1| \rightarrow |K_0|$. Soit $i'_1 : K'_1 \rightarrow K_1$ une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K_1|}$.



D'après (b) les morphismes $H_*(i_0)$, $H_*(i_1)$ et $H_*(i'_1)$ sont iso.

K'_1 est une subdivision de K_1 donc de K et $i_0 \circ f : K'_1 \rightarrow K$ est une approximation simpliciale de $\text{id} : |K'_1| \rightarrow |K|$ comme composée d'approximations simpliciales donc d'après (b) $H_*(i_0 \circ f) = H_*(i_0) \circ H_*(f)$ est iso. Comme $H_*(i_0)$ est iso, $H_*(f)$ l'est également. La composée $i_1 \circ i'_1 : K'_1 \rightarrow K$ est également une approximation simpliciale de $\text{id} : |K'_1| \rightarrow |K|$ donc d'après la proposition 6.3 $i_1 \circ i'_1$ et $i_0 \circ f$ sont contiguës donc $H_*(i_1 \circ i'_1) = H_*(i_0 \circ f)$.

Les composées $f_1 \circ i'_1$ et $f_0 \circ f$ sont toutes deux des approximations simpliciales de g relatives à K'_1 et L donc sont contiguës donc $H_*(f_1 \circ i'_1) = H_*(f_0 \circ f)$.

$$\begin{aligned}
 \text{On écrit } H_*(f_1) \circ H_*(i_1)^{-1} &= H_*(f_1) \circ H_*(i'_1) \circ H_*(i'_1)^{-1} \circ H_*(i_1)^{-1} \\
 &= H_*(f_1 \circ i'_1) \circ H_*(i_1 \circ i'_1)^{-1} \\
 &= H_*(f_0 \circ f) \circ H_*(i_0 \circ f)^{-1} \\
 &= H_*(f_0) \circ H_*(f) \circ H_*(f)^{-1} \circ H_*(i_0)^{-1} \\
 &= H_*(f_0) \circ H_*(i_0)^{-1}
 \end{aligned}$$

□

Ex. Démontrer le point (b) du théorème pour $i : \text{sb}(K) \rightarrow K$ une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$ vérifiant $\forall \sigma \in K, i(\text{sb}(K)(\sigma)) \subset K(\sigma)$ avec la suite exacte de Mayer-Vietoris plutôt que le théorème des modèles acycliques.

7. L'invariance par homotopie

On note I l'intervalle $[0, 1]$ de \mathbb{R} . I est un simplexe de dimension 1 dans \mathbb{R} de sommets 0 et 1. L'ensemble formé de I et de ses faces $\{0\}$ et $\{1\}$ est un complexe simplicial dans \mathbb{R} dont l'espace topologique sous-jacent est I . On le note \mathcal{I} .

On note i_0 et i_1 les inclusions simpliciales $\{\{0\}\} \rightarrow \mathcal{I}$ et $\{\{1\}\} \rightarrow \mathcal{I}$. Leurs réalisations $|i_0|$ et $|i_1|$ sont les inclusions $\{0\} \rightarrow I$ et $\{1\} \rightarrow I$ qu'on notera encore (abusivement) i_0 et i_1 .

Déf. Soient X, Y des espaces topologiques et $f, g : X \rightarrow Y$ des applications continues. On dit que f est homotope à g s'il existe une application continue $h : X \times I \rightarrow Y$ telle que $h \circ i_0 = f$ et $h \circ i_1 = g$.

Ex. Montrer que la relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues $X \rightarrow Y$.

Théorème 7.1 Soient K, L des complexes simpliciaux et $f, g : |K| \rightarrow |L|$ des applications continues. Si f est homotope à g alors $H_*(f) = H_*(g) : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$.

Le théorème est conséquence de la proposition qui suit :

On fixe un espace vectoriel euclidien E . Pour X une partie de E on appelle triangulation de X dans E un complexe simplicial K dans E tel que $|K| = X$. (Un tel K n'existe pas forcément).

Soit K un complexe simplicial fini dans un espace vectoriel euclidien E (si K est abstrait, on le remplace par sa réalisation \overline{K} dans $E = \mathbb{R}^{S_K}$). Pour chaque simplexe σ de K on note (σ, i) , $i = 0, 1$, la partie $\sigma \times \{i\}$ de $E \times \mathbb{R}$. L'ensemble de ces parties, noté $K \times \{0, 1\}$ est un complexe simplicial dans $E \times \mathbb{R}$ réunion de deux copies de K . L'espace topologique sous-jacent à $K \times \{0, 1\}$ est $|K| \times \{0, 1\} \subset E \times \mathbb{R}$.

Prop. 7.2 Soit K un complexe simplicial fini dans un espace euclidien E . Il existe un complexe simplicial fini Cyl_K dans $E \times \mathbb{R}$ et une application simpliciale $(j_0, j_1) : K \times \{0, 1\} \rightarrow Cyl_K$ tels que

- (1) Cyl_K est une triangulation de $|K| \times I$ dans $E \times \mathbb{R}$ et $|(j_0, j_1)| : |K \times \{0, 1\}| \rightarrow |Cyl_K|$ est l'application $\text{id} \times (i_0, i_1) : |K| \times \{0, 1\} \rightarrow |K| \times I$
- (2) L'application continue $\text{pr}_1 : |Cyl_K| = |K| \times I \rightarrow |K|$, $(x, t) \mapsto x$ induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration. On construit pour chaque $\sigma \in K$ un complexe simplicial Cyl_σ dans $E \times \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés (1) et (2) par récurrence sur la dimension de σ .

Si σ est réduit à un point $A \in E$ on pose $Cyl_\sigma = \{\{A\} \times \tau, \tau \in \mathcal{I}\}$ dont l'espace topologique sous-jacent est $\{A\} \times I = |\sigma| \times I$.

Pour σ quelconque, si Cyl_τ a été construit pour toute face stricte τ de σ on note ∂Cyl_σ le complexe simplicial dans $E \times \mathbb{R}$ formé des faces de $\sigma \times \{i\}$, $i = 0, 1$, (y compris $\sigma \times \{i\}$) et des simplexes de Cyl_τ pour τ face stricte de σ . On note $\hat{\sigma}$ l'isobarycentre dans E des sommets de σ et on définit Cyl_σ comme l'ensemble des simplexes de $E \times \mathbb{R}$ de sommets $\{(\hat{\sigma}, \frac{1}{2}), A_0, \dots, A_k\}$ et de leurs faces, où $\{A_0, \dots, A_k\}$ décrit les ensembles de sommets S_τ , $\tau \in \partial Cyl_\sigma$.

On vérifie que Cyl_σ est un complexe simplicial dans $E \times \mathbb{R}$, qu'on a $|Cyl_\sigma| = |\sigma| \times I$ et $Cyl_\sigma \cap Cyl_\tau = Cyl_{\sigma \cap \tau}$ pour toute paire de simplexe σ, τ de K , de sorte que la réunion $Cyl_K := \bigcup_{\sigma \in K} Cyl_\sigma$ est un complexe simplicial dans $E \times \mathbb{R}$. On vérifie d'autre part que le complexe simplicial formé du seul sommet $(\hat{\sigma}, \frac{1}{2})$ est un retract par déformation contiguë de Cyl_σ donc l'application $Cyl_\sigma \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie.

On note j_i les inclusions $K \times \{i\} \rightarrow Cyl_K$, $i = 0, 1$. Le théorème des modèles acycliques (ou la suite exacte de Mayer-Vietoris) permet de démontrer le

Lemme 7.3 L'inclusion $j_0 : K \times \{0\} \rightarrow Cyl_K$ induit un isomorphisme en homologie.

Comme la composée $\text{pr}_1 \circ |j_0| : |K| \rightarrow |K|$ est l'identité, l'application continue pr_1 induit également un isomorphisme en homologie.

□

Démonstration du théorème. On a $H_*(\text{pr}_1 \circ |j_0|) = H_*(\text{pr}_1 \circ |j_1|) = H_*(\text{id}_K)$ donc $H_*(j_0) = H_*(j_1)$ donc $H_*(h \circ |j_0|) = H_*(h \circ |j_1|)$. □

Équivalences d'homotopie et déformations

Déf. Soient $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. On dit que f est une **équivalence d'homotopie** s'il existe une application continue $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f$ soit homotope à id_X et $f \circ g$ soit homotope à id_Y .

Corollaire 7.4 (du théorème). Soient K, L des complexes simpliciaux et $f : |K| \rightarrow |L|$ une application continue qui est une équivalence d'homotopie ; alors $H_*(f) : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $g : |L| \rightarrow |K|$ telle que $g \circ f$ soit homotope à $\text{id}_{|K|}$ et $f \circ g$ soit homotope à $\text{id}_{|L|}$. D'après le théorème on a $H_*(g \circ f) = H_*(\text{id}_{|K|})$ et $H_*(f \circ g) = H_*(\text{id}_{|L|})$. Or $H_*(\text{id}_{|K|}) = \text{id}_{H_*(K)}$ et $H_*(\text{id}_{|L|}) = \text{id}_{H_*(L)}$. On en conclut que $H_*(f)$ est un isomorphisme d'inverse $H_*(g)$. \square

Cas particulier :

Déf. Soient X un espace topologique et A une partie de X . On dit que A est un **rétract par déformation continu** de X s'il existe une application continue $g : X \rightarrow A$ telle que la composée $A \hookrightarrow X \xrightarrow{g} A$ est l'identité de A et telle que la composée $X \xrightarrow{g} A \hookrightarrow X$ est homotope à id_X .

Le corollaire dit en particulier que si L est un complexe simplicial dans un espace vectoriel euclidien E et si K est un sous-complexe de L dans E tel que $|K|$ soit un rétract par déformation continu de $|L|$ alors l'inclusion $K \rightarrow L$ induit un isomorphisme en homologie.

Ex. On reprend l'une des triangulations du cylindre donnée en section 3 (figure ci-dessous) qu'on peut réaliser dans \mathbb{R}^3 . Alors $|K|$ est un rétract par déformation continu de $|L|$ donc l'inclusion $i : K \rightarrow L$ induit un isomorphisme en homologie donc également la rétraction r puisque $H_*(r) \circ H_*(i) = H_*(\text{id}_K) = \text{id}_{H_*(K)}$.

