M2 Math – Topologie Algébrique

Homologie des complexes simpliciaux[1]

(version du 5 janvier 2010)

1. Complexes simpliciaux finis

Rappel de géométrie affine sur $\mathbb{R}$

Soient $A_0, \ldots, A_n$ $n+1$ points de $\mathbb{R}^N$ (ou d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E) (n et N sont deux entiers quelconques). Le plus petit sous-espace affine de $\mathbb{R}^N$ contenant tous les A_i est l'ensemble des barycentres $\sum_i \lambda_i A_i$, $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ décrivant les $n+1$-uplets de réels de somme 1. On le note $< A_0, \ldots, A_n >$. Les points $A_0, \ldots, A_n$ sont affinement indépendants si tout point de $< A_0, \ldots, A_n >$ s'écrit $\sum_i \lambda_i A_i$ pour un unique $n+1$-uplets de réels (λ_i) de somme 1. De façon équivalente $A_0, \ldots, A_n$ sont affinement indépendants si et seulement si le sous-espace affine $< A_0, \ldots, A_n >$ est de dimension n.

Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^N$ est convexe si pour tout couple de points A, B de $\mathcal{C}$ le segment $[A, B]$ est dans $\mathcal{C}$. L'ensemble

$$\{\textstyle\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1\}$$

est la plus petite partie convexe de $\mathbb{R}^N$ contenant tous les A_i. On la note $\mathrm{C}(A_0, \ldots, A_n)$ et on l'appelle l'enveloppe convexe des A_i. C'est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^N$ donc un espace topologique compact pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^N$.

Un sommet (ou point extrémal) d'une partie convexe $\mathcal{C}$ est un point A de $\mathcal{C}$ vérifiant

$$\forall B, C \in \mathcal{C}, A \in [B, C] \Rightarrow (A = B \text{ ou } A = C)\ .$$

Lemme 1.1 Si les points A_i sont affinement indépendants alors les sommets de $\mathrm{C}(A_0, \ldots, A_n)$ sont exactement les points A_i.

Ex. Qu'en est il si les A_i ne sont pas affinement indépendants ?

Lemme 1.2 Soit $f : \{A_0, \ldots, A_n\} \to \mathbb{R}^{N'}$ une application. Si les points $A_0, \ldots, A_n$ sont affinement indépendants alors f s'étend de façon unique en une application affine $\tilde{f} : \mathrm{C}(A_0, \ldots, A_n) \to \mathbb{R}^{N'}$ d'image l'enveloppe convexe des $f(A_i)$.

L'application $\tilde{f}$ vérifie $\tilde{f}(\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(A_i)$ et cette formule définit $\tilde{f}$ puisque l'écriture $\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$ est unique.

Ex. Montrer par un exemple que l'hypothèse "les A_i sont affinement indépendants" est nécessaire.

Complexe simplicial dans $\mathbb{R}^N$

Déf. On appelle **simplexe** dans $\mathbb{R}^N$ l'enveloppe convexe d'un ensemble fini non vide $\{A_0, \ldots, A_n\}$ de points affinement indépendants dans $\mathbb{R}^N$.

On note S_σ l'ensemble des sommets d'un simplexe σ. L'entier $n = \sharp S_\sigma - 1$ est appelé **dimension** du simplexe σ. Il coïncide avec la dimension du plus petit sous-espace affine de $\mathbb{R}^N$ contenant σ.

On appelle **face** d'un simplexe σ tout simplexe dans $\mathbb{R}^N$ dont les sommets sont des sommets de σ. Les faces de σ sont donc exactement les enveloppes convexes des sous-ensembles non vides de l'ensemble des sommets de σ. Un simplexe σ de dimension n a $2^{n+1} - 1$ faces.

Déf. On appelle **complexe simplicial** (fini) dans $\mathbb{R}^N$ un ensemble fini K de simplexes de $\mathbb{R}^N$ vérifiant :

– toute face d'un simplexe de K est un simplexe de K ;

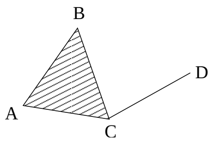
– l'intersection de deux simplexes de K est vide ou une face de chacun des simplexes.

On appelle **sommet** d'un complexe simplicial K tout sommet d'un simplexe de K. L'ensemble des sommets de K est noté S_K.

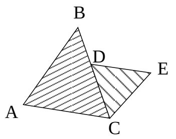
[1] F.X. Dehon, dehon@unice.fr

Ex. 1) L'ensemble des faces d'un simplexe σ dans $\mathbb{R}^N$ est un complexe simplicial qu'on notera $K(\sigma)$. Plus généralement soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des simplexes dans $\mathbb{R}^N$ tels que l'intersection de toute paire de simplexes σ_i, σ_j soit une face de chacun d'eux ; alors l'ensemble des simplexes σ_i et de leurs faces est un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^N$ qu'on appellera complexe simplicial engendré par les σ_i et qu'on notera $K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ou encore $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n + \text{ faces}\}$.

2) L'ensemble formé du simplexe $\mathrm{C}(A, B, C)$, du simplexe $\mathrm{C}(C, D)$ et de leurs faces (figure ci-dessous) est un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^2$.



3) L'ensemble formé des simplexes $\mathrm{C}(A, B, C)$, $\mathrm{C}(D, C, F)$ et de leurs faces (figure ci-dessous) n'est pas un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^2$: les simplexes $\mathrm{C}(B, C)$ et $\mathrm{C}(D, C)$ ne s'intersectent pas suivant une face de $\mathrm{C}(B, C)$.



Déf. Un **sous - complexe simplicial** d'un complexe simplicial K dans $\mathbb{R}^N$ est un sous-ensemble K' de K qui est lui même un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^N$. Il suffit pour cela que toute face d'un élément de K' soit elle-même dans K'.

Morphismes entre complexes simpliciaux

Déf. Un **morphisme** d'un complexe simplicial K de $\mathbb{R}^N$ dans un complexe simplicial L de $\mathbb{R}^{N'}$ est la donnée d'une application f de l'ensemble des sommets de K dans l'ensemble des sommets de L vérifiant :

($\mathcal{Q}$) Pour tout simplexe σ de K, les images par f des sommets de σ sont les sommets d'un même simplexe τ de L.

On ne demande pas que f soit injective. On notera $f : K \to L$ (mais f n'est pas donnée comme une application de l'ensemble K dans l'ensemble L).

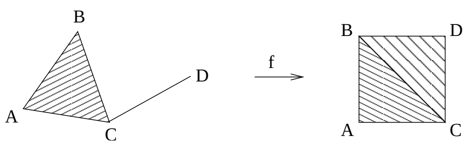
On observe : 1) Soit K un complexe simplicial. L'identité de l'ensemble des sommets de K vérifie la condition ($\mathcal{Q}$) donc définit un morphisme notée id_K.

2) Soient $f : K \to L$ et $g : L \to M$ des morphismes entre complexes simpliciaux, alors l'application composée $g \circ f : S_K \to S_M$ vérifie ($\mathcal{Q}$).

On dispose donc d'une composition des morphismes entre complexes simpliciaux et du morphisme identité. Un morphisme $f : K \to L$ est un **isomorphisme** de complexes simpliciaux s'il existe $g : L \to K$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient l'identité de L et l'identité de K respectivement.

Ex. 1) Si A est un élément d'un espace vectoriel, l'ensemble formé du seul simplexe $\mathrm{C}(A) = \{A\}$ est un complexe simplicial qu'on appelle un **point**. Pour tout complexe simplicial K il existe un et un seul morphisme de K dans le point $\{\{A\}\}$.

2) K est formé des simplexes $\mathrm{C}(A, B, C)$, $\mathrm{C}(C, D)$ et de leurs faces. L est formé des simplexes $\mathrm{C}(A, B, C)$, $\mathrm{C}(B, C, D)$ et de leurs faces (figure ci-dessous).



L'application $f : A \mapsto A, B \mapsto B, C \mapsto C, D \mapsto D$ définit un morphisme encore noté $f : K \to L$ de complexes simpliciaux et f est bijective sur l'ensemble des sommets mais f n'est pas un isomorphisme. Quels sont les morphismes de L dans K ?

Soit $f : K \to L$ un morphisme entre complexes simpliciaux. A tout simplexe σ de K, de sommets $A_0, \ldots, A_n$, on associe le simplexe $\mathrm{C}(f(A_0), \ldots, f(A_n))$ de L qu'on note $f(\sigma)$. (On étend ainsi $f : S_K \to S_L$ en une application d'ensembles $K \to L$.) On note $f(K)$ l'ensemble formé par les $f(\sigma)$, σ décrivant K.

Prop. 1.3 L'ensemble $f(K)$ est un sous-complexe simplicial de L.

Exercice. Pourquoi $\mathrm{C}(f(A_0), \ldots, f(A_n))$ est il un simplexe ? Démontrer la proposition.

Espace topologique sous-jacent à un complexe simplicial

Déf. Soit K un complexe simplicial fini dans $\mathbb{R}^N$. La réunion des simplexes de K munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^N$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^N$ (c'est une partie fermée et bornée). On l'appelle l'**espace topologique sous-jacent** à K et on la note $|K|$. L'espace topologique sous-jacent à un complexe simplicial de $\mathbb{R}^N$ est souvent appelé un **polytope** de $\mathbb{R}^N$.

Ex. Soit A un point de $\mathbb{R}^N$. L'espace topologique sous-jacent à $K(\{A\}) = \{\{A\}\}$ est formé du seul point A.

Observons que le polytope $|K|$ ne détermine pas le complexe simplicial K ni même l'ensemble de sommets S_K : Un polytope qui n'est pas un ensemble discret de points de $\mathbb{R}^N$ admet une infinité de triangulations.

Lemme 1.4 Soit K un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^N$ et X un espace topologique. La donnée d'une application continue $f : |K| \to X$ équivaut à la donnée d'une famille d'applications continues $(f_\sigma : \sigma \to X)_{\sigma \in K}$ vérifiant

$$\forall \sigma, \tau \in K, \quad f_\sigma|_{\sigma \cap \tau} = f_\tau|_{\sigma \cap \tau} \ .$$

Soit $f : K \to L$ un morphisme entre complexes simpliciaux. D'après le lemme 1.2, pour chaque simplexe σ de K la restriction de f à l'ensemble des sommets de σ s'étend de façon unique en une application affine de σ dans $f(\sigma)$. Si σ et τ sont deux simplexes de K, les applications affines ainsi définies sur σ et τ coïncident sur $\sigma \cap \tau$. On obtient donc d'après le lemme ci-dessus une application continue de $|K|$ dans $|L|$ qu'on note $|f|$. L'application $|f|$ est affine par morceaux. Sa restriction à l'ensemble des sommets de K est égale à f donc $|f|$ détermine f. On dit que $|f|$ est une **application simpliciale** relativement à K et L.

Prop. 1.5 On a les égalités $|\mathrm{Id}_K| = \mathrm{Id}_{|K|}$ et $|g \circ f| = |g| \circ |f|$ pour $f : K \to L$ et $g : L \to M$ des morphismes entre complexes simpliciaux. En particulier si f est un isomorphisme de complexes simpliciaux alors $|f|$ est un **homéomorphisme** (une bijection continue dont la réciproque est continue).

Complexe simplicial abstrait

Ce qui suit à pour but de montrer que les complexes simpliciaux et leurs morphismes sont des données essentiellement combinatoires. Malheureusement ce qu'on gagne en clarté est perdu en abstraction.

Déf. Un **complexe simplicial** (fini) **abstrait** est un ensemble (fini) K d'ensembles finis non vides vérifiant :

$$\forall \sigma \in K, \ \forall \tau \subset \sigma, \ \tau \neq \emptyset \Rightarrow \tau \in K \ .$$

Un élément de K s'appelle un simplexe de K. La dimension d'un simplexe $\sigma \in K$ est le nombre d'éléments de σ moins 1. Les éléments des simplexes de K sont appelés les sommets de K. L'ensemble des sommets de K est donc la réunion ensembliste des simplexes de K ; il est noté S_K. Une partie non vide τ d'un simplexe σ de K s'appelle une face de σ.

Déf. Un **sous-complexe simplicial** abstrait de K est une partie K' de K qui est elle même un complexe simplicial abstrait.

Ex. 1) Soit S un ensemble. L'ensemble des parties finies non vides de S est un complexe simplicial qu'on appelle **simplexe standart de base** S et qu'on note $\triangle_S$. Tout complexe simplicial abstrait K est un sous-complexe simplicial de $\triangle_{S_K}$.

2) Plus généralement soit S un ensemble et P un ensemble de parties non vides de S. Il existe un plus petit sous-complexe simplicial de $\triangle_S$ (au sens de l'inclusion) contenant P ; on l'appelle le complexe simplicial engendré par P et on le notera $K(P)$.

3) Soient K et L deux complexes simpliciaux d'ensembles de sommets S_K et S_L pas nécessairement distincts. La réunion ensembliste de K et de L coïncide avec le sous-complexe simplicial de $\triangle_{S_K \cup S_L}$ engendré par K et L. L'intersection de K et de L est également un sous-complexe simplicial de $\triangle_{S_K \cup S_L}$ contenu dans K et dans L.

4) Tout complexe simplicial K est la réunion des simplexes standarts de base les simplexes maximaux (pour l'inclusion) de K.

5) Soit S un ensemble et prenons pour P l'ensemble des parties non vides formées de S privé d'un élément de S ; alors $K(P)$ est la réunion des simplexes standarts de base les faces strictes de $\triangle_S$, et est noté $\partial\triangle_S$.

On notera $[n]$ l'ensemble $\{0,\dots,n\}$ et $\triangle_{[n]}$ le simplexe standart associé, appelé simplexe standart de dimension n.

Soit K un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^N$. A chaque simplexe σ de K correspond l'ensemble S_σ des sommets de σ. L'ensemble des S_σ, σ décrivant les simplexes de K, est un complexe simplicial abstrait qu'on note $\underline{\mathbf{K}}$ et qu'on appelle le **complexe simplicial abstrait sous-jacent** à K.

Si K est le complexe simplicial $K(\sigma)$ associé à un simplexe σ de $\mathbb{R}^N$ alors $\underline{K}$ est le simplexe standart $\triangle_{S_\sigma}$.

Soient K, L deux complexes simpliciaux abstraits. Une application $S_K \to S_L$ est dite simpliciale si elle vérifie

$$\forall \sigma \in K, \quad f(\sigma) \in L\ .$$

On appelle **morphisme** de K dans L et on note $f : K \to L$ la donnée d'une application simpliciale $f : S_K \to S_L$.

Ex. 1) Soit L un complexe simplicial et K un sous-complexe simplicial de L. L'inclusion $S_K \to S_L$ est une application simpliciale.

2) Soit K un complexe simplicial abstrait et S un ensemble fini. Toute application $S_K \to S$ détermine un morphisme $K \to \triangle_S$. En particulier si S est de cardinal $n+1$, $n \geq 0$, toute bijection $[n] \to S$ détermine un isomorphisme $\triangle_{[n]} \to \triangle_S$.

3) Le simplexe standart $\triangle_{[0]}$ a un seul sommet ; on l'appelle aussi **le point** et on le note pt. Soit K un complexe simplicial ; l'unique application de l'ensemble des sommets de K dans le singleton $\{0\}$ définit l'unique morphisme de complexes simpliciaux $K \to \mathrm{pt}$. Nous utiliserons cette application par la suite.

Réalisation

Déf. On appelle **réalisation** dans $\mathbb{R}^N$ d'un complexe simplicial abstrait K la donnée d'un complexe simplicial L dans $\mathbb{R}^N$ et d'un isomorphisme de K dans le complexe simplicial abstrait $\underline{L}$ sous-jacent à L.

(Ainsi tout complexe simplicial K dans $\mathbb{R}^N$ est une réalisation dans $\mathbb{R}^N$ du complexe abstrait sous-jacent.)

Soit K un complexe simplicial abstrait d'ensemble de sommets S_K. On construit une **réalisation canonique** $\overline{\mathbf{K}}$ de K comme suit : On considère l'espace vectoriel, noté $\mathbb{R}\otimes S_K$ ou $\mathbb{R}^{S_K}$ si S_K est fini, des applications à support fini de S_K dans $\mathbb{R}$. Si s est un élément de S_K on note e_s l'application $S_K \to \mathbb{R}$ qui vaut 1 en s et 0 ailleurs. La famille $(e_s)_{s\in S_K}$ est une base de $\mathbb{R}\otimes S_K$. On identifie S_K avec son image par e. A chaque simplexe σ de K on associe l'enveloppe convexe $\mathrm{C}(\sigma)$ des sommets de σ dans $\mathbb{R}\otimes S_K$. L'ensemble des $\mathrm{C}(\sigma)$, σ décrivant les simplexes de K, est un complexe simplicial dans $\mathbb{R}\otimes S_K$ qu'on appelle la réalisation (canonique) de K dans $\mathbb{R}\otimes S_K$ et qu'on note $\overline{\mathbf{K}}$.

A un complexe simplicial fini abstrait K on associe l'espace topologique sous-jacent à la réalisation canonique $\overline{K}$ de K, qu'on note encore $|K|$. Un morphisme $K \to L$ induit une application continue $|K| \to |L|$ qu'on dit simpliciale.

Soient K et L deux complexes simpliciaux finis dont les ensembles de sommets ne sont pas nécessairement disjoints. En identifiant l'espace vectoriel $\mathbb{R}\otimes S_K$ à son image dans $\mathbb{R}\otimes(S_K\cup S_L)$ via l'inclusion $S_K \to S_K\cup S_L$ on fait de $|K|$ un sous-espace topologique de $|K\cup L|$. De même $|L|$ s'identifie à un sous-espace topologique de $|K\cup L|$. On a alors $|K\cup L| = |K|\cup|L|$ et $|K\cap L| = |K|\cap|L|$ dans $\mathbb{R}\otimes(S_K\cup S_L)$.

Observons que si K est un complexe simplicial abstrait et L un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^N$ alors la donnée d'un morphisme $\overline{K} \to L$ équivaut à la donnée d'un morphisme $K \to \underline{L}$.

Question : Soit K un complexe simplicial abstrait fini. Que peut-on dire du plus petit entier N tel que K admette une réalisation dans $\mathbb{R}^N$?

On a deux bornes évidentes : N est supérieur ou égal à la dimension maximale d'un simplexe de K ; N est majoré par le nombre de sommets de K moins 1 puisque $\overline{K}$ est contenu dans un hyperplan affine de $\mathbb{R}\otimes S_K$.

2. Triangulation des espaces topologiques

(version[2] du 5 janvier 2010)

Déf. Soit X un espace topologique. On appelle **triangulation** (finie) de X la donnée d'un complexe simplicial (abstrait) fini K et d'un homéomorphisme $|K| \to X$

Rappelons que la donnée d'une application continue $f : |K| \to X$ équivaut à la donnée de la famille d'applications continues $(f|_\sigma : \sigma \to X)_{\sigma \in K}$.

Lemme 2.1 Soit X un espace topologique séparé, K un complexe simplicial fini et $f : |K| \to X$ une application continue bijective ; alors f est un homéomorphisme.

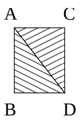
Démonstration. Il s'agit de montrer que l'application réciproque de f est continue autrement dit que l'image par f d'un fermé de $|K|$ est un fermé de X. Comme $|K|$ est compact, tout fermé de $|K|$ est compact donc son image par f est quasi-compact dans X. Or X est séparé donc les parties quasi-compactes de X sont fermées dans X. $\square$

L'exemple $X = |K|$ muni de la topologie grossière et $f = \mathrm{id}$ montre que l'hypothèse "X est séparé" est nécessaire.

Ex. 1) Soit $n \geq 0$ un entier. On peut construire un homéomorphisme f de l'espace topologique $|\triangle_{[n]}|$ associé au simplexe standard $\triangle_{[n]}$ de dimension n dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$. La restriction de f à l'espace topologique $|\partial\triangle_{[n]}|$ donne une triangulation de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ par le complexe simplicial $\partial\triangle_{[n]}$.

2) On peut également construire un homéomorphisme de l'espace $|\triangle_{[n]}|$ sur le pavé $[0,1]^n$ de $\mathbb{R}^n$.

3) Le complexe simplicial K dans $\mathbb{R}^2$ dessiné ci-dessous est une triangulation du rectangle plein.

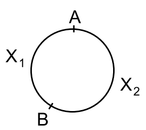


4) Soit K_n le complexe simplicial $\{\{0,1\},\{1,2\},\ldots,\{n-1,n\},\{n,0\} + \text{faces}\}$; alors $|K_n|$ est homéomorphe au cercle S^1. Fixons deux telles triangulations (K_n, f), $(K_{n'}, f')$ du cercle. Si $n \neq n'$ il n'y a pas d'application simpliciale $|K_n| \to |K_{n'}|$ compatible avec les homéomorphismes f et f' (*i.e.* telle que f_n soit la composée $f_{n'} \circ (|K_n| \to |K_{n'}|)$; en particulier les deux triangulations sont non-isomorphes.

Triangulation par morceaux

Prop. 2.2 Soit X un espace topologique séparé, X_1, X_2 deux parties de X de réunion X ("recouvrant X"). On suppose donnés une triangulation finie (K, f) de l'intersection $X_1 \cap X_2$, un complexe simplicial K_1 contenant K et un homéomorphisme $f_1 : |K_1| \to X_1$ dont la composée avec l'inclusion $|K| \to |K_1|$ coïncide avec f, un complexe simplicial K_2 contenant K et un homéomorphisme $f_2 : |K_2| \to X_2$ dont la composée avec l'inclusion $|K| \to |K_2|$ coïncide avec f. On suppose enfin que l'intersection $K_1 \cap K_2$ des complexes simpliciaux est égale à K. Alors f_1 et f_2 se prolonge en un homéomorphisme $|K_1 \cup K_2| \to X$.

Rq. Sans l'hypothèse $K_1 \cap K_2 = K$ les applications f_1, f_2 ne s'étendent pas à $|K_1 \cup K_2|$ en général : Prenons pour X le cercle S^1 sur lequel on choisit deux points distincts A, B. Soient X_1 et X_2 les deux arcs joignant A à B.

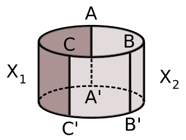


L'intersection $X_1 \cap X_2$ est triangulée par le complexe simplicial $K = \{\{A\},\{B\}\}$. Prenons $K_1 = K_2 = \{\{A,B\} + \text{faces}\}$. Pour $i = 1,2$, il existe un homéomorphisme $f_i : |K_i| \to X_i$ qui est lídentité sur $\{A, B\}$. f_1 et f_2 coïncident sur $|K|$ mais pas sur $|K_1 \cap K_2|$ donc ils ne se prolongent pas en une même application $|K_1 \cup K_2| \to X$.

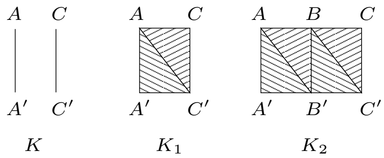
Ex. 1) Considérons le cylindre $X = \mathrm{S}^1 \times [0,1]$. On choisit trois point distincts A, B, C sur le cercle S^1. On note encore A, B, C, respectivement A', B', C' les points correspondant sur $\mathrm{S}^1 \times \{0\}$, respectivement sur $\mathrm{S}^1 \times \{1\}$.

[2] F.X. Dehon, dehon@unice.fr

On pose
$X_1 = \big(\text{arc joignant } A \text{ à } C\big) \times [0,1]$,
$X_2 = \big(\text{arc joignant } A \text{ à } C \text{ passant par } B\big) \times [0,1]$
X_1 et X_2 sont homéomorphes à des rectangles pleins ; leur intersection est la réunion des segments $[A, A']$ et $[C, C']$.

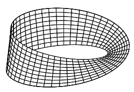


On peut trianguler $X_1 \cap X_2$, X_1 et X_2 par les complexes simpliciaux représentés ci-dessous



Alors $K_1 \cup K_2$ muni de l'application $|K_1 \cup K_2| \to X_1 \cup X_2$ étendant les homéomorphismes $|K_1| \to X_1$ et $|K_2| \to X_2$ est une triangulation du cylindre.

2) Donner une triangulation du ruban de Moebius



Voici maintenant deux énoncés pour lesquels nous renvoyons aux références :

Théorème 2.3 Soit M une variété compacte à bord de classe C^1. Il existe un complexe simplicial fini L, un sous-complexe simplicial K de L et un homéomorphisme $f : |L| \to M$ dont la restriction à $|K|$ est un homéomorphisme sur ∂M.

Théorème 2.4 Il existe une variété compacte de classe C^0 non triangulable.

Annexe 1. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ – variétés abstraites

Pour les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ voir [H. Cartan, *Formes différentielles*, Herman (1967), section 4.7].

Variétés abstraites : voir par exemple [I. Madsen & J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology*, Cambridge Univ. Press (1997), chap. 8].

Annexe 2. Triangulation des espaces quotient

Espaces topologiques quotient

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble X. On note $\sim_{eq}$ la relation d'équivalence sur X engendré par $\sim$: c'est la plus petite relation d'équivalence contenant $\sim$ au sens de l'inclusion des graphes. Pour $x, y \in X$ on a $x \sim_{eq} y$ si et seulement si $x = y$ ou s'il existe un entier $k \geq 1$ et des éléments $x_0, \ldots, x_k$ de X tels que $x_0 = x$, $x_k = y$ et $x_i \sim x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \sim x_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$.

On note $X/\!\sim$ et on appelle ensemble **quotient** de X par $\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence de X pour la relation $\sim_{eq}$. On note π la projection $X \to X/\!\sim$.

Propriété universelle : Soit f une application de X dans un ensemble Y. Il existe une application $\bar{f} : X/\!\sim \to Y$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$ si et seulement si

$$\forall x, x' \in X,\ x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')\ .$$

Un tel $\bar{f}$ est alors unique ; on l'appelle l'**application induite** par f.

Si X est un espace topologique on munit l'ensemble $X/\!\sim$ de la topologie la plus fine rendant π continue. Ainsi une partie $F \subset X/\!\sim$ est fermée ssi $\pi^{-1}(F)$ est fermée dans X.

Si f est une application continue de X dans un espace topologique Y induisant une application d'ensembles $\bar{f} : X/\!\sim \to Y$, alors $\bar{f}$ est continue.

Rappelons qu'un espace topologique X est dit compact si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement fini. X est dit séparé si pour toute paire d'éléments $x, y \in X$ il existe des ouverts U, V de X d'intersection vide tels que $x \in U$ et $y \in V$. L'image d'un compact par une application continue est compact. Si X est séparé, toute partie compacte de X est fermée dans X. On en déduit le :

Lemme 2.5 Soient X un espace compact, Y un espace séparé et $f : X \to Y$ une application continue surjective. On définit la relation $\sim$ sur X par $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$; alors l'application $X/\!\sim \to Y$ induite par f est un homéomorphisme.

Ex. 1) On choisit pour modèle du cercle S^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1. L'application $[0,1] \to \mathrm{S}^1$, $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ induit un homéomorphisme $[0,1]/\!\sim \to \mathrm{S}^1$ où $\sim$ est la relation sur $[0,1]$ donnée par $0 \sim 1$.

2) L'application de $\mathrm{S}^1 \times [0,1]$ dans le tore $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$, $(z,t) \mapsto (z, \exp(2i\pi t))$, induit un homéomorphisme $(\mathrm{S}^1 \times [0,1])/\!\sim \to \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$ où $\sim$ est la relation sur $\mathrm{S}^1 \times [0,1]$ donnée par $(z,0) \sim (z,1)$ pour tout $z \in \mathrm{S}^1$.

3) Soit $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ l'application $z \mapsto \bar{z}$ (symétrie par rapport à l'axe réel). La bouteille de Klein est le quotient du cylindre $\mathrm{S}^1 \times [0,1]$ par la relation $(z,0) \sim (\varphi(z), 1)$.

4) Soit G un groupe fini agissant sur un espace topologique X. On définit la relation $\sim$ sur X par $x \sim g.x$ pour tout $x \in X$ et $g \in G$. On note X/G le quotient $X/\!\sim$ appelé quotient de X par G. L'espace projectif réel de dimension n, $\mathbb{R}P^n$, est le quotient $\mathrm{S}^n/(\mathbb{Z}/2)$ où $\mathbb{Z}/2$ agit sur S^n par la symétrie centrale par rapport à 0 (antipodie).

Cas particulier : les sommes amalgamées

Soient X, Y, Z des espaces topologiques et $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ des applications continues. On note $Y \cup_X Z$ le quotient de la réunion disjointe $Y \sqcup Z$ par la relation $\sim$ donnée par $f(x) \sim g(x)$ pour tout $x \in X$. L'espace topologique $Y \cup_X Z$ s'appelle la **somme amalgamée** de Y et de Z sous X ou encore la somme amalgamée du diagramme $Y \leftarrow X \to Z$. Notons (p, q) la projection $Y \sqcup Z \to Y \cup_X Z$ ($p : Y \to Y \cup_X Z, q : Z \to Y \cup_X Z$). L'espace topologique $Y \cup_X Z$ muni des applications p, q vérifie la propriété universelle suivante :

Soient T un espace topologique et $p' : Y \to T$, $q' : Z \to T$ des applications continues telles que $p' \circ f = q' \circ g$ alors il existe une application continue $h : Y \cup_X Z \to T$ et une seule vérifiant $p' = h \circ p$ et $q' = h \circ q$.

On en déduit :

Soient $Y \leftarrow X \to Z$ et $Y' \leftarrow X' \to Z'$ des diagrammes d'espaces topologiques et $X \to X'$, $Y \to Y'$, $Z \to Z'$ des homéomorphismes tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Y & \leftarrow & X & \rightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \leftarrow & X' & \rightarrow & Z' \end{array}$$

commute ; alors l'application induite $Y \cup_X Z \to Y' \cup_{X'} Z'$ est un homéomorphisme.

Complexes simpliciaux quotient

Soient K un complexe simplicial et $\sim$ une relation sur S_K (l'ensemble des sommets de K). On note π la projection $S_K \to S_K/\!\sim$. L'ensemble formé par les parties $\pi(S_\sigma)$ de $S_K/\!\sim$, σ décrivant K, est un complexe simplicial abstrait. En effet $\pi(S_\sigma)$ est un ensemble fini non vide et pour toute partie non vide A de $\pi(S_\sigma)$ il existe une face τ de σ tel que $S_\tau = \pi^{-1}(A) \cap S_\sigma$ de sorte que $\pi(S_\tau) = A$.

Rq. On n'a pas en général $\pi(S_\sigma) \cap \pi(S_\tau) = \pi(S_{\sigma \cap \tau})$.

Déf. On appelle $\{\pi(S_\sigma), \sigma \in K\}$ le **complexe simplicial quotient** de K par la relation $\sim$ et on le note $K/\!\sim$.

L'application $\pi : S_K \to S_{K/\sim} = (S_K)/\!\sim$ est un morphisme de complexes simpliciaux et vérifie la propriété universelle suivante :

Pour tout application simpliciale f de K dans un complexe simplicial L il existe une application simpliciale $\bar{f} : K/\sim \to L$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$ si et seulement si $\forall s, s' \in S_K,\ s \sim s' \Rightarrow f(s) = f(s')$. Un tel $\bar{f}$ est alors unique ; on l'appelle l'application simpliciale induite par f.

La "réalisation" de π, $|\pi| : |K| \to |K/\sim|$ est continue et surjective ; elle induit un homéomorphisme $|K|/\sim \to |K/\sim|$, où $\sim$ est la relation sur $|K|$ donnée par $x \sim y \Leftrightarrow |\pi|(x) = |\pi|(y)$, en vertue du lemme 2.5

Ex. Soit $\sim$ la relation sur $S_{\triangle[2]}$ donnée par $0 \sim 2$, alors $\triangle[2]/\sim$ est le complexe simplicial abstrait $\{\{\bar{0}, \bar{1}\}, \{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}\} \simeq \triangle[1]$, où on a noté $\bar{0}$ la classe d'équivalence du sommet 0 dans $S_{\triangle[2]}/\sim$, etc.

Cas particulier : sommes amalgamées de complexes simpliciaux

Soient K, L, M des complexes simpliciaux et $f : K \to L$, $g : K \to M$ des applications simpliciales. On note $L \cup_K M$ le complexe simplicial quotient $(L \sqcup M)/\sim$ où $\sim$ est la relation sur $S_{L \sqcup M} = S_L \sqcup S_M$ donnée par $f(s) \sim g(s)$ pour tout $s \in S_K$, et on l'appelle la **somme amalgamée** de L et de M sous K ou encore la somme amalgamée du diagramme $L \leftarrow K \to M$.

Notons (p, q) la projection $L \sqcup M \to L \cup_K M$ ($p : L \to L \cup_K M$, $q : M \to L \cup_K M$). Le complexe simplicial $L \cup_K M$ muni des deux applications simpliciales p, q vérifie la propriété universelle suivante :

Soit N un complexe simplicial et $p' : L \to N$, $q' : M \to N$ des applications simpliciales telles que $p' \circ f = q' \circ g$ alors il existe une et une seule application simpliciale $h : L \cup_K M \to N$ vérifiant $p' = h \circ p$ et $q' = h \circ q$.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & M \\ \downarrow f & & \downarrow q \\ L & \xrightarrow{p} & L \cup_K M \end{array}$$

induit un diagramme commutatif d'espaces topologiques et applications continues

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{|g|} & |M| \\ \downarrow |f| & & \downarrow |q| \\ |L| & \xrightarrow{|p|} & |L \cup_K M| \end{array}$$

donc une application continue $h : |L| \cup_{|K|} |M| \to |L \cup_K M|$. Si L et M sont finis, il suffit à cette application d'être bijective pour qu'elle soit un homéomorphisme en vertue du lemme 2.5 puisque $|L| \cup_{|K|} |M|$ est le quotient d'un espace compact donc est compact et puisque $|L \cup_K M|$ est séparé. On sait déjà que $S_L \sqcup S_M \to S_{L \cup_K M}$ est surjective donc $|L| \sqcup |M| \to |L \cup_K M|$ est surjective donc également h.

Notons pour $n \geq 0$ et K un complexe simplicial, $K_{(n)}$ le sous-complexe simplicial de K formé des simplexes de dimension inférieure ou égale à n. Une application simpliciale $f : K \to L$ se restreint en une application simpliciale $K_{(n)} \to L_{(n)}$, laquelle induit une application d'ensembles $K_{(n)} \to L_{(n)}, \sigma \mapsto f(\sigma)$

Lemme 2.6 Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

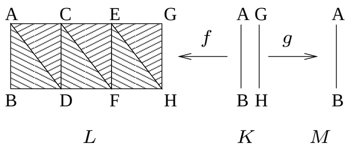
(i) L'application $|L| \cup_{|K|} |M| \to |L \cup_K M|$ est un homéomorphisme.

(ii) Pour chaque entier n l'application $L_{(n)} \cup_{K_{(n)}} M_{(n)} \to (L \cup_K M)_{(n)}$ est une bijection d'ensembles.

Une condition suffisante (avec les notations de la section 5) : $f : K \to L$ est injective (*i.e.* $f : S_K \to S_L$ est injective) et saturée (*i.e.* pour toute partie A de S_K, si $f(A) = S\tau$ pour un simplexe τ de L alors $A = S_\sigma$ pour un simplexe σ de K) et pour tout sommet s de L la restriction de g à $f^{-1}\big(\bigcup_{\sigma \in \mathrm{St}(s)} S_\sigma\big)$ est injective (on dira que g vérifie la condition $(Inj*)$ relativement à f).

Ex. K est formé du 1-simplexe $\{0, 2\}$ et de ses faces ; $L = \partial\triangle[2]$; $f : K \to L$ est l'inclusion ; g est l'application $K \to \mathrm{pt}$. Alors $L \cup_K \mathrm{pt}$ est isomorphe à $\triangle[1]$ alors que $|L| \cup_{|K|} |\mathrm{pt}| = ([0, 1] \cup [1, 2])/0 \sim 2$ est homéormophe au cercle S^1. f est injective et saturée mais g ne vérifie pas la condition $(Inj*)$.

Ex. 1) La triangulation du cylindre et du ruban de Moebius : L est la triangulation d'un rectangle plein $ABHG$ du plan donnée ci-dessous (figure) ; K est formé de la réunion disjointe des 1-simplexes AB et GH et de leurs faces ; M est formé du 1-simplexe AB et de ses faces. f est l'inclusion de K dans L (f est injective et saturée).

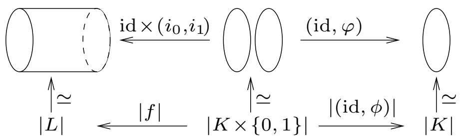


Prenons pour g l'application simpliciale $A, G \mapsto A$; $B, H \mapsto B$. Alors g vérifie la condition $(Inj*)$ relativement à f donc $|L \cup_K M|$ est homéomorphe à $|L| \cup_{|K|} |M| \simeq \mathrm{S}^1 \times [0, 1]$ (le cylindre).

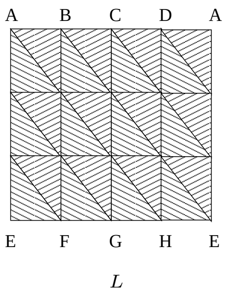
Prenons maintenant pour g l'application simpliciale $A, H \mapsto A$; $B, G \mapsto B$. g vérifie toujours la condition $(Inj*)$ relativement à f donc $|L \cup_K M|$ est homéomorphe à $|L| \cup_{|K|} |M|$ lequel est un ruban de Moebius.

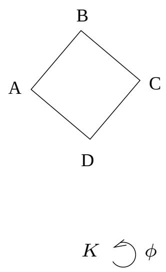
2) La bouteille de Klein : On choisit une triangulation à homéomorphisme près L du cylindre $\mathrm{S}^1 \times [0, 1]$ et une triangulation K de S^1 avec une application simpliciale injective $f : K \times \{0, 1\} \to L$ telle que la composée $|K| \times \{0, 1\} \simeq |K \times \{0, 1\}| \xrightarrow{|f|} |L| \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^1 \times [0, 1]$ corresponde via l'homéomorphisme $|K| \to \mathrm{S}^1$ à l'inclusion $\mathrm{S}^1 \times \{0, 1\} \to \mathrm{S}^1 \times [0, 1]$. (Cf la triangulation de $|K| \times [0, 1]$ dans la section 6).

On choisit K de sorte que la symétrie par rapport à l'axe réel $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ (Cf l'ex 3 du paragraphe sur les espaces topologiques quotient) corresponde via l'homéomorphisme $|K| \to \mathrm{S}^1$ à une application simpliciale $\phi : K \to K$. Soient i_0 et i_1 les inclusions $K \to K \times \{0, 1\}$. On définit $g : K \times \{0, 1\} \to K$ par $g \circ i_0 = \mathrm{id}_K$ et $g \circ i_1 = \phi$.



On choisit L (contenant les deux copies de K) de sorte que f soit saturée et g vérifie la relation $(Inj*)$ relativement à f. Un choix possible pour K est le bord du carré $ABCD$ avec $\phi : A \mapsto A$, $C \mapsto C$, $B \mapsto D$, $D \mapsto B$ (figure ci-dessous) et pour L la triangulation du cylindre proposée ci-dessous





Cas particulier : quotient d'un complexe simplicial par l'action d'un groupe

Soient G un groupe fini et K un complexe simplicial. Une action simpliciale de G sur K est la donnée d'un homomorphisme de groupes ϕ de G sur le groupe des isomorphismes (simpliciaux) de K. On a donc pour tout $g \in G$ une application simpliciale $\phi(g) : K \to K$ avec les relations $\phi(1) = \mathrm{id}_K$ et $\phi(g.g') = \phi(g) \circ \phi(g')$. L'application $g \mapsto |\phi(g)|$ est une action de G sur l'espace topologique $|K|$.

On note K/G le quotient de K pour la relation $\sim$ sur S_K donnée par $s \sim \phi(g)(s)$ pour tout $s \in S_K$ et tout $g \in G$. La projection $K \to K/G$ induit une application continue surjective $|K| \to |K/G|$ invariante par l'action de G, donc une application continue $|K|/G \to |K/G|$. Comme pour les sommes amalgamées, si K est fini, il suffit à cette application d'être bijective pour être un homéomorphisme. (On sait déjà qu'elle est surjective.)

Lemme 2.7 Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application $|K|/G \to |K/G|$ est un homéomorphisme.

(ii) Pour chaque entier n l'application $K_{(n)}/G \to (K/G)_{(n)}$ est une bijection d'ensembles.

Une condition suffisante : Pour tout sommet $s \in S_K$ et tout $g \in G$, $\mathrm{St}(s) \cap \mathrm{St}(\phi(g)(s)) = \emptyset$.

Ex. Triangulation du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2 = \mathrm{S}^2/(\mathbb{Z}/2)$:

1) On choisit une triangulation L de la sphère S^2 avec un automorphisme simplicial $\phi : L \to L$ dont la réalisation $|\phi|$ s'identifie à l'antipodie $\mathrm{S}^2 \to \mathrm{S}^2$ (en particulier $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_L$) et vérifiant la condition suffisante ci-dessus. Pour cela on peut décrire la sphère S^2 comme la réunion de deux hémisphères collés le long de l'équateur S^1.

2) $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à la réunion d'un disque D^2 et du ruban de Moebius collés le long de leur bord S^1.

3) $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à la somme amalgamée $\mathrm{D}^2 \xleftarrow{f} \mathrm{S}^1 \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}^1/(\mathbb{Z}/2) \simeq \mathrm{S}^1$ où f est l'inclusion de S^1 comme bord du disque et où π est la projection de S^1 sur son quotient par l'action par antipodie de $\mathbb{Z}/2$.

Construire une triangulation suivant chaque programme (1) (2) et (3).

3. Complexes de groupes abéliens et homologie

Groupes abéliens de type fini

Soit $f : A \to B$ un morphisme de groupes abéliens (ou homomorphisme). On appelle noyau de f et on note $\ker(f)$ la partie de A formée des éléments a tels que $f(a) = 0$. On appelle image de f et on note $\mathrm{im}(f)$ la partie de B formée des élements $f(a)$, a décrivant A. Tous deux sont des sous-groupes abéliens de A et de B respectivement.

Soit A' un sous-groupe abélien de A. On appelle quotient de A par A' et on note A/A' l'ensemble des parties de A de la forme $a + A' = \{a + a', a' \in A'\}$, a dérivant A, munie de l'unique structure de groupe telle que la projection $p : A \to A/A'$, $a \mapsto a + A'$ soit un homomorphisme. Les éléments de A/A' forment une partition de A. La somme de $a + A'$ et de $b + A'$ dans A/A' est $(a + b) + A')$; l'élément neutre est $0 + A' = A'$.

Ex. Les groupes quotients de $\mathbb{Z}$ sont les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n un entier, qu'on notera pour faire court $\mathbb{Z}/n$.

Lemme 3.1 Soit $f : A \to B$ un morphisme de groupes abéliens et $A' \subset A$ un sous-groupe abélien de A. Il existe un homomorphisme $g : A/A' \to B$ tel que f soit la composée $g \circ p$ si et seulement si A' est contenu dans le noyau de f, auquel cas le morphisme g est unique.

Si $A' = \ker(f)$ alors l'homomorphisme g ci-dessus est unique. On l'appelle l'homomorphisme $A/A' \to B$ induit par f.

Plus généralement soient A un groupe abélien et $\sim$ une relation sur les éléments de A. On forme le sous-groupe B de A engendré par tous les élements qui s'écrivent $a - a'$ avec $a \sim a'$. Le groupe quotient A/B vérifie la propriété universelle suivante :

Lemme 3.2 Un morphisme de groupes abéliens $f : A \to C$ s'écrit comme la composée de la projection $A \to A/B$ avec un morphisme $A/B \to C$ si et seulement si on a

$$\forall a, a' \in A,\ a \sim a' \Rightarrow f(a) = f(a')$$

(auquel cas le morphisme $A/B \to C$ est unique).

Le quotient A/B s'appelle le groupe quotient de A par la relation $\sim$, le morphisme $A/B \to C$ s'appelle le morphisme induit par $f : A \to C$.

Soit S un ensemble fini. On note $\mathbb{Z}^S$ le groupe abélien des applications de S dans $\mathbb{Z}$. Pour chaque $s \in S$ notons e_s l'application $S \to \mathbb{Z}$ qui vaut 1 en s et 0 ailleurs. Toute application $f : S \to \mathbb{Z}$ s'écrit $f = \sum_{s\in S} f(s)e_s$ et cette écriture est unique. On dit que $\mathbb{Z}^S$ est un groupe abélien libre et que la famille $(e_s)_{s\in S}$, qu'on identifie à S, en est une base.

Lemme 3.3 Soit A un groupe abélien et $f : S \to A$ une application (d'ensembles). Alors f s'étend de façon unique en un homomorphisme $\mathbb{Z}^S \to A$.

On dit qu'un groupe abélien A est de type fini s'il existe une partie finie S de A qui engendre A, *i.e.* telle que tout élément de A s'écrive comme combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de S. Il revient au même de dire qu'il existe un ensemble fini S et un homomorphisme surjectif $\mathbb{Z}^S \to A$.

Soit A un groupe abélien de type fini. Une présentation de A est la donnée d'ensembles finis S et S', d'un homomorphisme surjectif $f : \mathbb{Z}^S \to A$ et d'un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}^{S'}$ dans le noyau de f. Comme conséquence de la proposition suivante, toute groupe abélien de type fini admet une présentation finie :

Prop. 3.4 Soit $n > 0$ un entier et f un homomorphisme de $\mathbb{Z}^n$ dans un groupe abélien A. Alors il existe une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ d'élements de $\mathbb{Z}^n$ et des entiers positifs $d_1, \ldots, d_n$ tels que d_i divise d_{i+1} pour $1 \le i < n$, vérifiant :

(i) la famille (e_i) est une base de $\mathbb{Z}^n$;

(ii) la sous-famille de (d_ie_i) formée des éléments non nuls est une base du noyau de f. (En particulier le noyau de f est un groupe abélien libre de dimension $\le n$.)

On dit que (e_i) est une base de $\mathbb{Z}^n$ adaptée à $\ker(f)$.

Sommes directes

Soient A un groupe abélien et H, G deux sous-groupes de A. On note $H + G$ le sous-groupe de A formé des sommes d'un élément de H avec un élément de G. Si l'intersection $H \cap G$ ne contient que 0 on dit que la somme de H et de G est directe et on la note.

Soient A et B deux groupes abéliens. On identifie A, respectivement B, avec le sous-groupe de $A \times B$ formé des couples $(a, 0)$, a décrivant A, respectivement $(0, b)$, b décrivant B. Alors la somme de A et de B dans $A \times B$ est directe, on écrira aussi bien $A \oplus B$ pour $A \times B$.

On dispose des inclusions canoniques $A \to A \oplus B$ et $B \to A \oplus B$ et des projections $A \oplus B \to A$, $A \oplus B \to B$. La donnée d'un homomorphisme d'un groupe abélien C dans $A \oplus B$ équivaut à celle des deux composées $C \to A \oplus B \to A$ et $C \to A \oplus B \to B$. On décrira un tel homorphisme par le couple des morphismes associés. La donnée d'un homomorphisme $A \oplus B \to C$ équivaut à celle des deux restrictions $A \to A \oplus B \to C$ et $B \to A \oplus B \to C$. On décrira un tel morphisme par le couple des morphismes associés.

Plus généralement un homorphisme d'une somme directe $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ dans une somme directe $B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ se décrit par une matrice à m lignes et n colonnes de morphismes $A_j \to B_i$. Lorsque les A_j et les B_i sont tous égaux à $\mathbb{Z}$ et en notant k l'homomorphisme 'ultiplication par k", on retrouve la matrice d'un homomorphisme $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$.

Ex. Quels sont les homomorphismes $\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4 \to \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$?

Corollaire 3.5 Avec les hypothèses et les conclusions de la proposition 3.4, f induit un isomorphisme

$$\mathbb{Z}/d_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_n \to \mathrm{Im}(f) \ .$$

Complexes de groupes abéliens et homologie

Déf. Un **complexe de groupes abéliens** est la donnée d'une suite $(C_n)_{n \geq 0}$ de groupes abéliens et d'une suite $(d_n : C_n \to C_{n-1})_{n \geq 1}$ d'homomorphismes vérifiant $d_n \circ d_{n+1} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

On pose $C_{-1} = \{0\}$ et $d_0 =$ le morphisme nul.

L'application $(d_n) : \oplus_n C_n \to \oplus_n C_{n-1}$ est appelé la **différentielle** du complexe et également noté d. Les éléments du noyau de d_n sont appelés les **cycles** de C_n et on note, ceux de l'image de d_n sont appelés les **bords** de C_{n-1}. Le complexe (C_n, d_n) est aussi noté C_* ou (C_*, d).

L'**homologie** d'un tel complexe est la suite des groupes abéliens quotient $\mathrm{H}_n(C) := \ker(d_n)/\mathrm{im}(d_{n+1})$, $n \geq 0$. On la note $\mathrm{H}_*(C)$.

Ex. $\cdots 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{(\mathrm{id},\mathrm{id})} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{2\mathrm{id},-2\mathrm{id}} \mathbb{Z} \to 0$ où le groupe 0 le plus à droite est en degré -1. L'homologie de ce complexe est 0 en degré 2 et 1, $\mathbb{Z}/2$ en degré 0.

Un morphisme d'un complexe (de groupes abéliens) C_* dans un complexe D_* est une suite d'homomorphismes $f_n : C_n \to D_n$, $n \geq 0$, telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & D_{n+1} \\ \big\downarrow{\scriptstyle d_{n+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle d_{n+1}} \\ C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n \end{array}$$

commutent pour tout $n \geq 0$, *i.e.* telle que $d_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Une telle suite de morphismes transforme les cycles, respectivement bords, de C_n en cycles, respectivement bords, de D_n donc induit une suite de morphismes $\mathrm{H}_n(C) \to \mathrm{H}_n(D)$, $n \geq 0$: pour chaque entier n la composée $\ker(d_n : C_n \to C_{n-1}) \xrightarrow{f_n} \ker(d_n : D_n \to D_{n-1}) \to \mathrm{H}_n(D)$ est nulle sur $\mathrm{im}(d_{n+1} : C_{n+1} \to C_n)$ donc se factorise via $\mathrm{H}_n(C)$.

4. Homologie des complexes simpliciaux

Simplexes numérotés, orientés

Soient K un complexe simplicial et σ un simplexe de K de dimension n (ou n**-simplexe**). Une numérotation des sommets de σ est la donnée d'une bijection f de $\{0,\ldots,n\}$ dans l'ensemble S_σ des sommets de σ ou de façon équivalente d'un ordre total sur l'ensemble des sommets de σ (et on posera $f(0) =$ "le plus petit élément", etc.). Elle est décrite par le $n+1$-uplet formé des sommets de σ écrits dans l'ordre. On notera ainsi $(A_0,\ldots,A_n)$ un **simplexe numéroté** de dimension n. $(A_{\varphi(0)},\ldots,A_{\varphi(n)})$, φ décrivant l'ensemble des permutations de $\{0,\ldots,n\}$, décrit l'ensemble des numérotations d'un même simplexe d'ensemble de sommets $\{A_0,\ldots,A_n\}$.

Déf. Une orientation de σ est la donnée d'une numérotation $f : \{0,\ldots,n\} \to S_\sigma$ à une permutation paire (*i.e.* de signature 1) près de $\{0,\ldots,n\}$. La donnée d'un simplexe σ et d'une orientation est appelée **simplexe orienté** de K.

On note $[A_0,\ldots,A_n]$ le simplexe orienté associé à la numérotation $(A_0,\ldots,A_n)$ des sommets de σ. Les simplexes de dimension 0 n'admettent qu'une seule orientation ; les simplexes de dimension > 0 admettent exactement deux orientations.

Ex. Considérons le complexe simplicial $\triangle[2] = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$. Les simplexes de dimension 0 : $\{0\},\{1\},\{2\}$ n'ont qu'une seule orientation puisqu'ils n'ont qu'une seule numérotation. Chaque simplexe de dimension 1 a deux orientations qui correspondent aux deux numérotations : par exemple $(0,1)$ et $(1,0)$ définissent deux orientations différentes du simplexe $\{0,1\}$. Le simplexe $\{0,1,2\}$ admet six numérotations différentes qui donnent les deux orientations suivantes : $[0,1,2] = [1,2,0] = [2,0,1]$ et $[1,0,2] = [0,2,1] = [2,1,0]$.

Complexe des chaînes

Déf. Le groupe des **chaîne en degré** n d'un complexe simplicial K est le groupe quotient du groupe abélien libre de base les simplexes numérotés de dimension n de K par la relation sur les générateurs :

$$(A_0,\ldots,A_n) \sim \epsilon(\varphi)(A_{\varphi(0)},\ldots,\varphi(n))$$

pour tout n-simplexe numéroté $(A_0,\ldots,A_n)$ de K et toute permutation φ de $\{0,\ldots,n\}$, où $\epsilon(\varphi) \in \{-1,1\}$ est la signature de φ. On le note $\mathrm{C}_n(K)$.

Deux simplexes numérotés $(A_0,\ldots,A_n)$ et $(A_{\varphi(0)},\ldots,\varphi(n))$ qui diffèrent par une permutation φ de signature 1 définissent le même élément de $\mathrm{C}_n(K)$. Cet élément ne dépend donc que du simplexe orienté $[A_0,\ldots,A_n]$, on le notera encore $[A_0,\ldots,A_n]$.

Prop. 4.1 Choisissons pour chaque n-simplexe σ de K une orientation $\mathcal{O}_\sigma$; alors toute chaîne en degré n de K s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients $\mathbb{Z}$ des n-simplexes orientés $(\sigma,\mathcal{O}_\sigma)$; autrement dit la famille $((\sigma,\mathcal{O}_\sigma))_\sigma$ indexée par les n-simplexes de K est une base de $\mathrm{C}_n(K)$.

En pratique on choisit une orientation des n-simplexes de K en choisissant un ordre total sur les sommmets de K : un tel ordre induit un ordre total sur les sommets de chaque simplexe de K donc une numérotation des sommets de ces simplexes. En pratique également on définit les homorphismes de $\mathrm{C}_n(K)$ dans un groupe abélien D par leurs valeurs sur les générateurs $(A_0,\ldots,A_n)$. On a en effet d'après les lemmes 3.2et 3.3:

Prop. 4.2 Pour tout groupe abélien D la donnée d'un morphisme de groupe abélien $f : \mathrm{C}_n(K) \to D$ équivaut à la donnée des images par f des générateurs $(A_0,\ldots,A_n)$ sous la condition

$$f((A_{\varphi(0)},\ldots,A_{\varphi(n)})) = \epsilon(\varphi)f((A_0,\ldots,A_n))$$

pour tout simplexe numéroté $(A_0,\ldots,A_n)$ et pour toute permutation φ.

Déf. On définit "l'opérateur de bord" $d_n : \mathrm{C}_n(K) \to \mathrm{C}_{n-1}(K)$ pour $n \geq 1$ par

$$\mathrm{d}_n((A_0,\ldots,A_n)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[A_0,\ldots,\hat{A}_i,\ldots,A_n]$$

pour tout générateur $(A_0,\ldots,A_n)$, où $[A_0,\ldots,\hat{A}_i,\ldots,A_n]$ désigne la classe du n-uplet obtenu en supprimant A_i en position i. On pose $\mathrm{d}_0 = 0$, le morphisme nul $\mathrm{C}_0(K) \to \{0\}$.

On vérifie que d_n est bien défini, *i.e.* qu'il vérifie $\mathrm{d}_n(A_{\varphi(0)},\ldots,A_{\varphi(n)})) = \epsilon(\varphi)\mathrm{d}_n((A_0,\ldots,A_n))$ pour toute permutation φ.

Lemme 4.3 La composée $\mathrm{d}_n \circ \mathrm{d}_{n+1}$ est le morphisme nul $\mathrm{C}_{n+1}(K) \to \mathrm{C}_n(K)$, autrement dit la suite $\mathrm{d} = (\mathrm{d}_n)$ est une différentielle.

Déf. Le complexe de groupes abéliens $(\mathrm{C}_*(K), \mathrm{d})$ est appelé **complexe des chaînes** de K ; son homologie est appelé **homologie du complexe simplicial** K et noté $\mathrm{H}_*(K)$.

Ex. 1) pt $= \triangle[0]$ est le complexe simplicial avec un seul simplexe et un seul sommet noté 0. $\mathrm{C}_0(\mathrm{pt})$ est le groupe abélien libre engendré par le seul 0-simplexe orienté $[0]$ et $\mathrm{C}_n(\mathrm{pt})$ est le groupe nul pour $n \neq 0$. Les différentielles sont forcément nulles. $\mathrm{H}_0(\mathrm{pt})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, engendré par la classe du cycle $[0]$, et $\mathrm{H}_n(\mathrm{pt})$ est le groupe nul si $n \neq 0$.

2) $\partial\triangle[2]$ est le complexe simplicial formé des trois 1-simplexes $\{0,1\}$, $\{0,2\}$ et $\{1,2\}$ et de leurs faces.

$\mathrm{C}_0(\partial\triangle[2])$ est le groupe abélien libre de base $([0],[1],[2])$ (donc de dimension 3).

On obtient une base de $\mathrm{C}_1(\partial\triangle[2])$ en choisissant une orientation des 1-simplexes. L'ordre naturel sur les sommets $0,1,2$ donnent la base $([0,1],[0,2],[1,2])$.
La différentielle d_1 est donnée par $\mathrm{d}_1([0,1]) = [1]-[0]$, $\mathrm{d}_1([0,2]) = [2]-[0]$, $\mathrm{d}_1([1,2]) = [2]-[1]$.

Les groupes $\mathrm{C}_n(\partial\triangle[2])$ sont nuls pour $n \neq 0,1$.

On observe que C_0 est la somme directe de $\mathbb{Z}.[0]$ avec $\mathrm{im}(d_1)$ donc $\mathrm{H}_0(\partial\triangle[2])$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, engendré par la classe de $[0]$.

$\mathrm{H}_1(\partial\triangle[2])$ est égal au noyau de d_1, donc à l'ensemble des combinaisons linéaires à coéfficients entiers $x[0,1]+y[0,2]+z[1,2]$ vérifiant

$$(-x-y)[0] + (x-z)[1] + (y+z)[2] = 0$$

soit $x = z = -y$. Le groupe d'homologie en degré 1 est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$ engendré par $[0,1]-[0,2]+[1,2]$. On observe que cette 1-chaîne est le bord de la 2-chaîne $[0,1,2]$ dans $\mathrm{C}_*(\triangle[2])$.

Calcul explicite de l'homologie d'un complexe simplicial fini

Choix d'un ordre total sur les sommets de K $\rightsquigarrow$ base ordonnée du groupe abélien $C_n(K)$ (ordre lexicographique sur les simplexes) $\rightsquigarrow$ matrice de la différentielle d_n $\rightsquigarrow$ (pivot arithmétique) base (donnée par la matrice de changement de bases) de $C_n(K)$ adaptée à $\ker(d_n)$ $\rightsquigarrow$ matrice de d_{n+1} restreint au but à $\ker(d_n)$ $\rightsquigarrow$ (pivot arithmétique) base de $\ker(d_n)$ adaptée à $\mathrm{im}(d_{n+1})$ et facteurs invariants $\rightsquigarrow$ générateurs indépendants de $\mathrm{H}_n(K)$ avec leur indice de torsion.

Soit M une matrice à m-lignes et n-colonnes à coefficients entiers. L'algorithme du pivot arithmétique fournit des matrices inversibles $U \in \mathrm{M}_m(\mathbb{Z})$ et $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que UMV soit diagonale, chaque élément sur la diagonale divisant le suivant. L'image par V de la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ est une base de $\mathbb{Z}^n$ adaptée au noyau de M ; L'image réciproque par U de la base canonique de $\mathbb{Z}^m$ est une base adaptée à l'image de M : l'image de M est engendré par les vecteurs de la nouvelle base multipliés par les coefficients diagonaux de UMV. Le conoyau de M est engendré par les classes des vecteurs de la nouvelle bases, ceux-ci étant "indépendants" entre eux, leur coefficient de torsion étant donnés par les coefficients diagonaux de UMV.

Ex.

Un exemple. Calcul de l'homologie d'une triangulation du plan projectif réel avec GP-Pari

`http://www-math.unice.fr/~dehon/Ens/M2topalg/RP2.html`

Documentation en ligne de GP-Pari

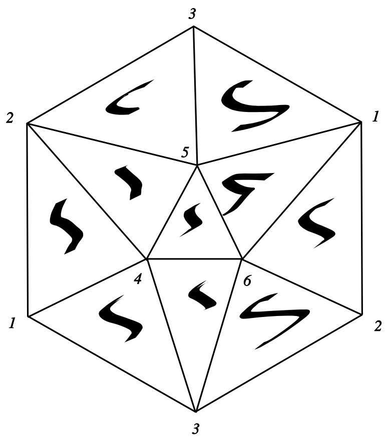
`http://pari.math.u-bordeaux.fr/dochtml/html.stable/`

Forme normale de Smith des matrices à coefficients entiers : voir par exemple la notice sur Wikipedia

`http://en.wikipedia.org/wiki/Smith_normal_form`

Une séance interactive peut être lancée sur la page `http://www.sagenb.org/` après création d'un compte utilisateur.

On considère le complexe simplicial abstrait d'ensemble de sommets $\{1, \ldots, 6\}$ engendré par les 2-simplexes représentés ci-dessous :



(Ce comlexe est une triangulation du plan projectif réel.) On oriente chaque simplexe de ce complexe par la numérotation indiquée des sommets du complexe. On définit dans GP/PARI les bases des groupes des 0-chaînes, 1-chaînes et 2-chaînes et les matrices des opérateurs de bord d_1 et d_2. On utilise la fonction `matsnf` de GP/Pari pour obtenir une forme normale des matrices des opérateurs avec les matrices de changement de bases. On en déduit une description des groupes d'homologie du complexe simplicial.

```
                  GP/PARI CALCULATOR Version 2.3.0 (released)
              i686 running linux (ix86/GMP-4.1.4 kernel) 32-bit version
          compiled: May 26 2006, gcc-4.1.0 20060304 (Red Hat 4.1.0-3)
                  (readline v5.0 enabled, extended help available)

                     Copyright (C) 2000-2006 The PARI Group

PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and comes WITHOUT ANY
WARRANTY WHATSOEVER.

Type ? for help, \q to quit.
Type ?12 for how to get moral (and possibly technical) support.

parisize = 4000000, primelimit = 500000

? /* Bases des 0-simplexes, 1-simplexes orientés, 2-simplexes orientés de RP^2 */
? U=[1,2,3,4,5,6];
? V=[[1,2],[1,3],[2,3],[1,4],[2,4],[2,5],[3,5],[1,5],[1,6],[2,6],[3,6],[3,4],[4,5],[5,6],[4,6]];
? W=[[1,2,4],[2,4,5],[2,3,5],[1,3,5],[1,5,6],[1,2,6],[2,3,6],[3,4,6],[1,3,4],[4,5,6]];

? /* Matrice de d_1 */
? A=matrix(6,15);
? for (i=1,15,A[V[i][2],i]=1;A[V[i][1],i]=-1);A /* matrice de l'opérateur de bord d_1 */
%5 =
[-1 -1 0 -1 0 0 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0]
```

```
[1 0 -1 0 -1 -1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0]

[0 1 1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 -1 0 0 0]

[0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 -1 0 -1]

[0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 -1 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1]

? /* rendu TeX de A */
? system("rm -f A.tex");writetex("A.tex",A);system("tex2latex A");
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

```
? /* forme normale de Smith */
? ?matsnf
matsnf(x,{flag=0}): Smith normal form (i.e. elementary divisors) of the matrix x, expressed
as a vector d. Binary digits of flag mean 1: returns [u,v,d] where d=u*x*v, otherwise only
the diagonal d is returned, 2: allow polynomial entries, otherwise assume x is integral, 4:
removes all information corresponding to entries equal to 1 in d.

? M=matsnf(A,1);
? M[3]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]

? /* Conclusion : le noyau de d_1 est de dim 10 ; l'image de d_1 est un facteur direct de C_0
de dimension 5 */
? writetex("M2.tex",M[2]);system("tex2latex M2");
```

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

```
? ker=vecextract(M[2],"1..10");A*ker /* Les 10 premières colonnes de M[2] forment la matrice des
coordonnées d'une base du noyau de d_1 ; vérification : */
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

```
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

? /* matrice de d_2 */
? ind(v,V)=local(i);i=1;while(V[i]<>v,i++);i /* Position de v dans V */
? B=matrix(15,10);{for (j=1,10,B[ind(vecextract(W[j],[2,3]),V),j]=1;
B[ind(vecextract(W[j],[1,3]),V),j]=-1; B[ind(vecextract(W[j],[1,2]),V),j]=1);}

? writetex("B.tex",B);system("tex2latex B");
```

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{pmatrix}$$

```
? BB=M[2]^(-1)*B; /* Matrice de d_2 relativement à la nouvelle base de C_1 */
? writetex("BB.tex",BB);system("tex2latex BB");
```

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

```
? /* d_2 est bien à valeurs dans ker(d_1) ! */
? BBB=vecextract(BB,"1..10","1..10"); /* 10 premières lignes et les 10 colonnes de BB */

? N=matsnf(BBB,1); /* mise sous forme normale */
? writetex("N3.tex",N[3]);system("tex2latex N3");
```

$$\begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

```
? /* Conclusion : ker(d_2)={0} ; im(d_2) est de dimension 10=dim(ker(d_1)) mais n'est pas un facteur
direct de ker(d_1); ker(d_1)/im(d_2)=Z/2Z */
```

5. Morphisme en homologie induit par une application simpliciale

Soit $f : K \to L$ un morphisme entre complexes simpliciaux. On s'est donc donné une application de l'ensemble S_K dans S_L vérifiant : Pour tout simplexe σ de K, il existe un simplexe τ de L tel que $f(S_\sigma) = S_\tau$, où S_K, S_L, S_σ, S_τ désignent l'ensemble des sommets de K, de L, de σ, etc..

Déf. On définit l'homomorphisme $\mathrm{C}_n(f) : \mathrm{C}_n(K) \to \mathrm{C}_n(L)$ sur les générateurs $[A_0, \dots, A_n]$ par

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n(f)([A_0,\dots,A_n]) &= [f(A_0),\dots,f(A_n)] \text{ si les sommets } f(A_0),\dots,f(A_n) \text{ sont distincts,}\\ &= 0 \text{ sinon.}\end{aligned}$$

L'homomorphisme $\mathrm{C}_n(f)$ est bien défini en vertu de la proposition 4.2 de car $\mathrm{C}_n(f)([A_{\varphi(0)},\dots,A_{\varphi(n)}]) = \epsilon(\varphi)\mathrm{C}_n(f)([A_0,\dots,A_n])$ pour tout n-simplexe orienté $[A_0,\dots,A_n]$ et toute permutation φ.

On note aussi f_* la suite d'homomorphismes $(\mathrm{C}_n(f))$.

Prop. 5.1 (a) $\mathrm{C}_n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}_{\mathrm{C}_n(K)}$ et, pour des morphismes $f : K \to L$ et $g : L \to M$ entre complexes simpliciaux, $\mathrm{C}_n(g \circ f) = \mathrm{C}_n(g) \circ \mathrm{C}_n(f)$.

(b) f_* commute avec la différentielle d, *i.e.* pour tout entier $n \geq 0$, $\mathrm{d}_{n+1} \circ \mathrm{C}_{n+1}(f) = \mathrm{C}_n(f) \circ \mathrm{d}_{n+1} : \mathrm{C}_{n+1}(K) \to \mathrm{C}_n(L)$.

Le point (b) de la proposition dit que $f_* : \mathrm{C}_*(K) \to \mathrm{C}_*(L)$ est un morphisme de complexes de groupes abéliens. Il induit donc un morphisme $\mathrm{H}_*(K) \to \mathrm{H}_*(L)$ qu'on note encore f_*.

Ex. Soit L un complexe simplicial et K un sous-complexe simplicial de L ; alors l'inclusion $K \to L$ induit au niveau des complexes de chaînes un morphisme injectif $\mathrm{C}_*(K) \to \mathrm{C}_*(L)$ qui permet d'identifier $\mathrm{C}_*(K)$ à un sous-complexe de groupes abéliens de $\mathrm{C}_*(L)$. L'application induite en homologie $\mathrm{H}_*(K) \to \mathrm{H}_*(L)$ n'est pas injective en générale : par exemple l'inclusion $\partial\triangle[2] \to \triangle[2]$ induit le morphisme nul

$$\mathbb{Z} \simeq \mathrm{H}_1(\partial\triangle[2]) \to \mathrm{H}_1(\triangle[2]) \simeq 0 \ .$$

(Pour le calcul de $\mathrm{H}_1(\triangle[2])$ voir la description de $\mathrm{H}_*(\triangle[n])$ plus loin.)

Application : composantes connexes d'un complexe simplicial et homologie

Déf. Un complexe simplicial K est dit **connexe** si pour toute paire de sommets distincts A, B de K il existe une suite de 1-simplexes (désignés par leurs sommets) $\{A_0, A_1\}, \dots, \{A_{n-1}, A_n\}$ de K tels que $A_0 = A$ et $A_n = B$.

Ex. Le complexe simplicial $\triangle[n]$ est connexe ; $\partial\triangle[1]$ n'est pas connexe.

Prop. 5.2 Soit K un complexe simplicial non vide et connexe ; alors le morphisme $K \to \mathrm{pt}$ induit un isomorphisme $\mathrm{H}_0(K) \to \mathrm{H}_0(\mathrm{pt})$.

Rq. L'homologie du point est nulle en degré strictement positif donc également le morphisme $\mathrm{H}_*(K) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{pt})$.

Soit K un complexe quelquonque. On introduit la relation suivante sur éléments (les simplexes) de K : $\sigma \sim \tau$ si $\sigma = \tau$ ou s'il existe une suite de 1-simplexes $\{A_0, A_1\}, \dots, \{A_{n-1}, A_n\}$ de K tels que A_0 est un sommet de σ et A_n est un sommet de τ.

Prop. 5.3 (a) Cette relation est une relation d'équivalence sur K.

(b) Les classes d'équivalence sont des sous-complexes simpliciaux connexes de K.

Comme les classes d'équivalence forment une partition de K on obtient une décomposition de K comme réunion disjointe de complexes simpliciaux connexes qu'on appelle **composantes connexes** de K.

Prop. 5.4 Soient K et L deux complexes simpliciaux et notons $K \sqcup L$ le complexe simplicial formé de la réunion disjointe de K et de L. Alors les inclusions $K \to K \sqcup L$ et $L \to K \sqcup L$ induisent pour tout entier n un isomorphisme

$$\mathrm{H}_n(K) \oplus \mathrm{H}_n(L) \to \mathrm{H}_n(K \sqcup L) \ .$$

Démonstration. Pour chaque entier n le groupe abélien $\mathrm{C}_n(K \sqcup L)$ est la somme directe des groupes abéliens $\mathrm{C}_n(K)$ et $\mathrm{C}_n(L)$ et la différentielle d_n est la somme directe des différentielles de $\mathrm{C}_n(K)$ et de $\mathrm{C}_n(L)$. $\square$

Corollaire 5.5 $\mathrm{H}_0(K)$ est un groupe abélien libre de dimension le nombre de composantes connexes de K.

Applications simpliciales contiguës et homologie

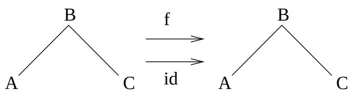
Déf. Deux morphismes $f, g : K \to L$ entre complexes simpliciaux sont dits **contiguës** si pour tout simplexe σ de K, il existe un simplexe τ de L tel que

$$f(S_\sigma) \cup g(S_\sigma) = S_\tau$$

(où S_σ, S_τ désigne l'ensemble des sommets de σ, etc.)

Cette relation est reflexive, symétrique mais pas transitive a priori.

Ex. 1) $K = L$ est le complexe simplicial dans $\mathbb{R}^2$ formé des segments $[A, B]$, $[B, C]$ et de leurs faces (figure ci-dessous). f est l'application simpliciale donnée par $A \mapsto A$, $B \mapsto B$, $C \mapsto B$; g est l'identité. Alors f et g sont contiguës.



Prenons maintenant $f : A \mapsto A$, $B \mapsto A$, $C \mapsto A$, alors f et g ne sont pas contiguës.

2) Montrer par un exemple que la relation de contiguïté n'est pas transitive.

Nous trouvons ici le premier théorème du cours :

Théorème 5.6 Si $f, g : K \to L$ sont deux applications simpliciales contiguës alors les morphismes induits en homologie $f_*, g_* : \mathrm{H}_*(K) \to \mathrm{H}_*(L)$ sont les mêmes.

Le théorème est la conséquence des deux propositions 5.7 et 5.8 qui suivent :

Déf. Deux morphismes $f_*, g_* : C_* \to D_*$ entre complexes de groupes abéliens sont dits homotopes s'il existe une suite d'homomorphismes $H_n : C_n \to D_{n+1}, n \geq 0$ vérifiant

$$\forall n \geq 0,\ f_n - g_n = \mathrm{d}_{n+1} H_n + H_{n-1} d_n$$

avec la convention $C_{-1} = \{0\}$, $H_{-1} =$ "le morphisme nul".

Ex. Montrer que la relation d'homotopie entre morphismes de complexes de groupes abéliens est une relation d'équivalence.

Prop. 5.7 Si $f_*, g_* : C_* \to D_*$ sont des morphismes homotopes entre complexes de groupes abéliens alors les morphismes induits en homologie $f_*, g_* : C_* \to D_*$ sont les mêmes.

Prop. 5.8 Soient $f, g : K \to L$ deux morphismes contiguës entre complexes simpliciaux alors les morphismes induits $f_*, g_* : \mathrm{C}_*(K) \to \mathrm{C}_*(L)$ sont homotopes.

Cas particulier : on considère $K = L = \triangle[n]$ (le complexe simplicial abstrait formé de l'ensemble des parties non vides de $\{0, \ldots, n\}$), $f = \mathrm{id}$ et g est le morphisme qui envoie tous les sommets de $\triangle[n]$ sur le sommet 0. Les morphismes f et g sont contiguës. La conclusion du théorème est que les morphismes $\mathrm{H}_*(f) = \mathrm{id}$ et $\mathrm{H}_*(g)$ sont les mêmes. Le morphisme g s'écrit comme la composée $g_1 \circ g_0$ où g_0 est l'unique morphisme $\triangle[n] \to \mathrm{pt}$ et où $g_1 : \mathrm{pt} \to \triangle[n]$ est l'inclusion qui envoie l'unique sommet de pt sur le sommet 0 de $\triangle[n]$. On a $\mathrm{H}_*(g_0) \circ \mathrm{H}_*(g_1) = \mathrm{H}_*(g_0 g_1) = \mathrm{id}$ et $\mathrm{H}_*(g_1) \circ \mathrm{H}_*(g_0) = \mathrm{H}_*(g)$. L'affirmation $\mathrm{H}_*(g) = \mathrm{id}$ permet de conclure que $\mathrm{H}_*(g_0)$ et $\mathrm{H}_*(g_1)$ sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Plutôt que de déduire l'égalité $\mathrm{H}_*(g) = \mathrm{id}$ du théorème, on procède dans l'ordre inverse : on démontre la proposition 5.8 dans ce cas particulier et on en déduit la proposition dans le cas général donc le théorème comme expliqué plus haut.

Démonstration de la proposition 5.8 dans le cas $K = L = \triangle[n]$, $f = \mathrm{id}$, $g \equiv 0$.

On définit $H : \mathrm{C}_k(\triangle[n]) \to \mathrm{C}_{k+1}(\triangle[n])$ par

$$\begin{aligned} H([A_0, \ldots, A_k]) &= [0, A_0, \ldots, A_k] \text{ si } 0 \notin \{A_0, \ldots, A_k\} \text{ (bien défini !)} \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Pour $k = 0$ on a $(f_* - g_*)([A]) = [A] - [0]$ et $(dH + Hd)([A]) = dH([A])$ qui vaut 0 si $A = 0$, $d[0, A] = [A] - [0]$ si $A \neq 0$.

Pour $k > 0$ on a $(f_* - g_*)([A_0, \dots, A_k]) = [A_0, \dots, A_k]$ et si $0 \notin \{A_0, \dots, A_k\}$ alors

$$\begin{array}{rcl} (dH + Hd)([A_0, \dots, A_k]) & = & d[0, A_0, \dots, A_k] + H\big(\sum_{i=0}^k (-1)^i [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]\big) \\ & = & [A_0, \dots, A_k] + \sum_{i=0}^k (-1)^{i+1} [0, A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k] \\ & & \qquad + \sum_{i=0}^k (-1)^i H([A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]) \\ & = & [A_0, \dots, A_k] \end{array}$$

car $H([A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]) = [0, A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]$.

Si $0 = A_{i_0}$ alors

$$\begin{array}{rcl} (dH + Hd)([A_0, \dots, A_k]) & = & H\big(\sum_{i=0}^k (-1)^i [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]\big) \\ & = & (-1)^{i_0} H\big([A_0, \dots, \hat{A_{i_0}}, \dots, A_k]\big) \\ & = & (-1)^{i_0} [0, A_0, \dots, \hat{A_{i_0}}, \dots, A_k] \\ & = & [A_0, \dots, A_k] \end{array}$$

car la permutation $(0, i_0)$ de $\{0, \dots, k\}$ est de signature $(-1)^{i_0}$.

On obtient :

Prop. 5.9 Le morphisme $\triangle[n] \to \mathrm{pt}$ induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration de la proposition 5.8 dans le cas général.

Pour σ un simplexe de K ou de L on note $\mathrm{C}_*(\sigma)$ le sous-complexe de $\mathrm{C}_*(K)$ (ou de $\mathrm{C}_*(L)$) engendré par les simplexes orientés dont le simplexe sous-jacent est une face de σ (y compris σ !). Soit n la dimension de σ. Il existe un isomorphisme de $\triangle[n]$ dans le sous-complexe simplicial de K formé des faces de σ. En particulier l'homologie de $\mathrm{C}_*(\sigma)$ est égale à l'homologie du point.

Par hypothèse sur f et g il existe pour tout simplexe σ de K un simplexe τ_σ de L tel que $S_{\tau_\sigma} = f(S_\sigma) \cup g(S_\sigma)$ (τ_σ est déterminé par ses sommets donc est unique). La restriction de $f_* - g_*$ à $\mathrm{C}_*(\sigma)$ est alors à valeur dans $\mathrm{C}_*(\tau_\sigma)$.

On choisit une base de $\mathrm{C}_k(K)$ formée de k-simplexes orientés en fixant un ordre total sur les sommets de K. La donnée de $H : \mathrm{C}_k(K) \to \mathrm{C}_{k+1}(L)$ équivaut alors à la donnée des éléments $H([A_0, \dots, A_k])$ de $\mathrm{C}_{k+1}(L)$, $[A_0, \dots, A_k]$ décrivant les k-simplexes orientés de K avec $A_0 < \dots < A_k$.

On définit H sur $\mathrm{C}_k(K)$ par récurrence sur k sous les deux conditions suivantes :

(R) $(dH + Hd) = f_* - g_*$.

(loc) $\forall \sigma \in K,\ H(\mathrm{C}_k(\sigma)) \subset \mathrm{C}_{k+1}(\tau_\sigma)$.

Pour $k = 0$ et $[A]$ un 0-simplexe orienté de K on a $f(A) = g(A)$ ou $\{f(A), g(A)\}$ est un 1-simplexe de L. On pose $H([A]) = [g(A), f(A)]$ si $f(A) \neq g(A)$, $H([A]) = 0$ sinon. Les conditions (R) et (loc) sont bien vérifiées.

Soit maintenant $k > 0$ et supposons H défini sur les $\mathrm{C}_i(K)$, $i < k$, vérifiant (R) et (loc). Soit $[A_0, \dots, A_k]$, $A_0 < \dots < A_k$ un vecteur de base de $\mathrm{C}_k(K)$ et notons τ le simplexe de L dont les sommets sont les éléments de $\{f(A_0, \dots, f(A_k), g(A_0), \dots, g(A_k)\}$.

On veut définir $H([A_0, \dots, A_k])$ vérifiant $H([A_0, \dots, A_k]) \in \mathrm{C}_{k+1}(\tau)$ (loc) et

$$dH([A_0, \dots, A_k]) = (f_* - g_* - Hd)([A_0, \dots, A_k]) \qquad \text{(R)}$$

(La restriction de d à $\mathrm{C}_k(K)$ est à valeurs dans $\mathrm{C}_{k-1}(K)$ donc la composée Hd est définie sur $\mathrm{C}_k(K)$.)

Une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir définir H est que $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \dots, A_k])$ soit un bord dans $\mathrm{C}_k(L)$. Ceci ne peut avoir lieu que si $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \dots, A_k])$ est un cycle, ce qu'on vérifie :

On calcule

$$\begin{array}{rcl} d(f_* - g_* - Hd) = df_* - dg_* - dHd & = & f_*d - g_*d - (f_* - g_* - Hd)d \\ & & \quad \text{car } f_* \text{ et } g_* \text{ sont des morphismes de complexes et } H \text{ vérifie (R)} \\ & = & Hdd = 0 \\ & & \quad (d \text{ est une différentielle}). \end{array}$$

Donc $d(f_* - g_* - Hd)$ est le morphisme nul. A fortiori $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \ldots, A_k])$ est un cycle.

L'élément $(f_* - g_*)([A_0, \ldots, A_k])$ est dans $\mathrm{C}_k(\tau)$ (avec la définition de τ donnée plus haut) et pour chaque $i \in \{0, \ldots, k\}$, $H([A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_k]) \in \mathrm{C}_k(\tau_{\{A_0,\ldots,\hat{A}_i,\ldots,A_k\}}) \subset \mathrm{C}_k(\tau)$ puisque la restriction de H à $\mathrm{C}_{k-1}(K)$ vérifie la condition (loc) et puisque $\tau_{\{A_0,\ldots,\hat{A}_i,\ldots,A_k\}}$ est une face de τ. Donc $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \ldots, A_k])$ est dans $\mathrm{C}_k(\tau)$. On a $\mathrm{H}_k(\mathrm{C}_k(\tau)) \simeq \mathrm{H}_k(\mathrm{pt}) = \{0\}$ d'après la discussion plus haut donc tout cycle de $\mathrm{C}_k(\tau)$ est le bord d'un élément de $\mathrm{C}_{k+1}(\tau)$. Ceci permet de définir $H([A_0, \ldots, A_k])$ vérifiant (R) et (loc).

$\square$

La démonstration de la proposition 5.8 conduit à l'énoncé plus complet suivant appelé théorème des modèles acycliques :

Théorème 5.10 Soit K, L deux complexes simpliciaux. On suppose donné pour chaque simplexe σ de K un sous-complexe simplicial $\Phi(\sigma)$ de L vérifiant :

$$\begin{cases} \text{L'application } \Phi(\sigma) \to \mathrm{pt} \text{ induit un isomorphisme en homologie.} \\ \text{Si } \tau \text{ est une face de } \sigma \text{ alors } \Phi(\tau) \subset \Phi(\sigma) \end{cases}$$

Alors il existe un morphisme de complexes de groupes abéliens $\phi : \mathrm{C}_*(K) \to \mathrm{C}_*(L)$ vérifiant

$$\phi([A_0, \ldots, A_k]) \in \Phi(\{A_0, \ldots, A_k\})$$

pour tout simplexe orienté $[A_0, \ldots, A_k]$ de K et deux tels morphismes induisent le même morphisme en homologie.

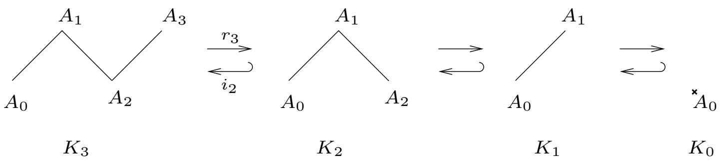
Un morphisme de complexes $\phi : \mathrm{C}_*(K) \to \mathrm{C}_*(L)$ vérifiant $\phi([A_0, \ldots, A_k]) \in \Phi(\{A_0, \ldots, A_k\})$ pour tout simplexe orienté $[A_0, \ldots, A_k]$ est dit **porté par** Φ.

Application au calcul de l'homologie d'un complexe simplicial

Soit L un complexe simplicial et $K \subset L$ un sous-complexe. On dit que K est un **retract** de L s'il existe une application simpliciale $r : L \to K$ telle que la composée de r avec l'inclusion $i : K \hookrightarrow L$ est le morphisme identité de K. On dit que K est un **retract par déformation contiguë de L** s'il existe une application simpliciale $r : L \to K$ vérifiant $r \circ i = \mathrm{id}$ et $i \circ r$ est contiguë à id_L.

Corollaire 5.11 Si $K \subset L$ est un retract par déformation contiguë de L alors l'inclusion $K \to L$ induit un isomorphisme en homologie d'inverse le morphisme induit par la retraction.

Ex. 1) Posons $K_0 = \mathrm{pt}$ et pour $n \geq 1$ notons K_n le complexe simplicial formé des simplexes $\{i, i+1\}$, $0 \leq i < n$ (ligne brisée). Soient i_n l'inclusion $K_n \to K_{n+1}$ et $r_{n+1} : K_{n+1} \to K_n$ l'application simpliciale donnée par $A_{n+1} \mapsto A_n$ et $A_i \mapsto A_i$ si $0 \leq i \leq n$.

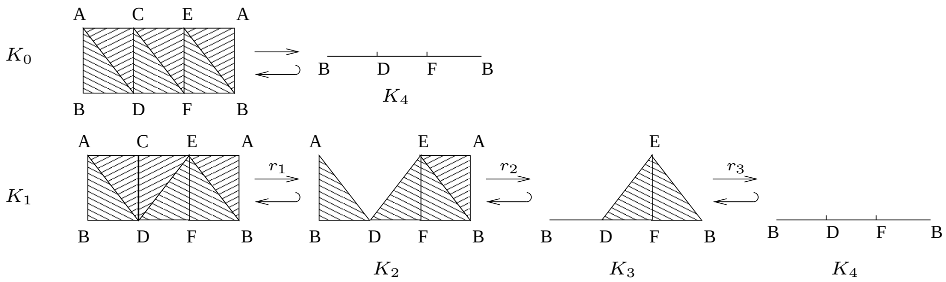


Alors $r_{n+1}i_n = \mathrm{id}_{K_n}$ et $i_n r_{n+1}$ est contiguë à $\mathrm{id}_{K_{n+1}}$ de sorte que K_n est un retract par deformation contiguë de K_{n+1}. On en déduit

$$\mathrm{H}_*(K_n) \simeq \mathrm{H}_*(K_{n-1}) \simeq \cdots \simeq \mathrm{H}_*(K_0) = \mathrm{H}_*(\mathrm{pt}) \ .$$

Observons que K_0 est un retract de K_n mais n'en est pas un retract par déformation contiguë pour $n \geq 2$. Ceci illustre le fait que la relation de contiguïté entre applications simpliciales n'est pas transitive.

2) On considère les deux triangulations K_0 et K_1 du cylindre (figure ci-dessous). r_1 est l'application simpliciale $C \mapsto D$, identité sur les autres sommets. r_2 est l'application simpliciale $A \mapsto B$, identité sur les autres sommets. r_3 est l'application simpliciale $E \mapsto F$, identité sur les autres sommets.



Pour $1 \leq i \leq 3$, les composées $\mathrm{incl} \circ r_i$ sont contiguës à id_{K_i} donc K_{i+1} est un retract par déformation contiguë de K_i. L'inclusion $K_4 \to K_1$ induit donc un isomorphisme en homologie. On reconnaît $K_4 \simeq \partial\triangle[2]$ dont on a calculé l'homologie plus haut.

K_4 est un retract de K_0 mais on ne sait pas passer par déformation contiguë de K_0 à K_4. Tout ce qu'on peut dire est que $\mathrm{H}_*(K_4)$ est un retract de $\mathrm{H}_*(K_0)$, en particulier que $\mathrm{H}_1(K_0)$ n'est pas le groupe nul.