M2 - Topologie algébrique Examen du 15 mars 2010

Notes de cours autorisées. Durée : 3 H

I le cercle

1) Proposer une triangulation du cercle S^1. On notera K le complexe simplicial correspondant.

2) Que valent $H_0(K)$ et $H_1(K)$ à isomorphisme près ?

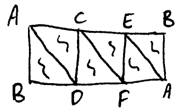
3) Soit $f : S^1 \to S^1$ une application continue. Quel sens peut on donner à $H_*(f) : H_*(K) \to H_*(K)$?

4) Quel est l'homomorphisme $H_0(f) : H_0(K) \to H_0(K)$? Quels sont les candidats possibles pour $H_1(f) : H_1(K) \to H_1(K)$? Parmis ces candidats lesquels sont des isomorphismes ?

II le ruban de Moebius

le ruban de Moebius peut être décrit comme la partie $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ formée des points $M(t,\rho) = ((\cos t)(1+\rho\cos\frac{t}{2}), (\sin t)(1+\rho\cos\frac{t}{2}), \rho\sin\frac{t}{2})$, t décrivant $[0,2\pi]$ et ρ décrivant $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. $\mathcal{R}$ est une surface à bord dont le bord $\partial\mathcal{R}$ est l'ensemble des points $M(t,\frac{1}{2})$, t décrivant $[0,4\pi]$

1) Montrer que l'ensemble des points $M(t,0)$, t décrivant $[0,2\pi]$, est un retract par déformation continue de $\mathcal{R}$. En déduire l'homologie à isomorphisme près de L où L est le complexe simplicial sous jacent à une triangulation de $\mathcal{R}$.

2) On note L le complexe simplicial abstrait représenté ci contre :  : A, B, C, D, E, F sont 6 éléments distincts et L est formé des 2-simplexes $\{A,B,D\}$, $\{A,C,D\}$, $\{C,D,F\}$, $\{C,E,F\}$, $\{E,F,A\}$, $\{E,A,B\}$ et de leurs faces.
On note ∂L le sous complexe simplicial de L engendré par les 1-simplexes de L qui ne sont face que d'un seul 2-simplexe.
Construire un homéomorphisme ~~f~~ h de l'espace topologique $|L|$ sous jacent à L dans $\mathcal{R}$. Vérifier que la restriction de h à $|\partial L|$ est un homéomorphisme sur $\partial\mathcal{R}$.

3) On note L' le complexe simplicial abstrait représenté ci-contre : A' — B' — C' — A' (A', B', C' sont des éléments distincts).
Montrer que l'application $f : S_L \to S_{L'}$, $A,B \mapsto A'$; $C,D \mapsto B'$; $E,F \mapsto C'$ est simpliciale. Montrer que f induit un isomorphisme en homologie.

4) Décrire l'homologie de ∂L et le morphisme induit en homologie par la restriction de f à ∂L.
L'application continue $|f|$ est elle un homéomorphisme ? Est elle homotope à un homéomorphisme ?

5) le ~~sous~~ bord $\partial\mathcal{R}$ est il un retract par déformation continue de $\mathcal{R}$?

III le disque

1) Soit N un élément distinct de A,B,C,D,E,F. On note $N\partial L$ le complexe simplicial abstrait formé des 2-simplexes $\{N,I,J\}$, où $\{I,J\}$ décrit les 1-simplexes de ∂L, et de leurs faces.
Montrer que le complexe simplicial formé du seul sommet N est un retract par déformation contiguë de $N\partial L$. En déduire l'homologie de $N\partial L$

2) Que peut on dire du morphisme induit en homologie par l'inclusion $\partial L \to N\partial L$?

IV Le plan projectif

1) On note Π le complexe simplicial abstrait réunion de L et de $N\partial L$; il est formé des simplexes de L et de $N\partial L$.
Décrire la suite exacte de Mayer-Vietoris associée aux sous-complexes L et $N\partial L$ de M. En déduire l'homologie de M.

2) Montrer que l'espace topologique sous-jacent à Π est homéomorphe au plan projectif réel.