# Corrigé de la feuille n° 1



I. $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$

< $\int_\alpha^\beta e^{-t} t^{a-1} dt$ est bien définie $\forall \alpha, \beta \in ]0,+\infty[$ et $\forall a \in \mathbb{R}$ comme intégrale d'une fonction continue. $\Gamma(a)$ est une intégrale impropre en $+\infty$ et, si $a<1$, en $0$. L'application $t \mapsto e^{-t} t^{a-1}$ est dominée par $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ au voisinage de $+\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$ est bien défini $\forall a \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto e^{-t} t^{a-1}$ est équivalente à $t \mapsto t^{a-1}$ au voisinage de $0$ donc $\int_0^1 e^{-t} t^{a-1} dt$ est bien défini si et seulement si $a > 0$. On obtient que $\Gamma(a)$ est bien défini ssi $a \in ]0,+\infty[$

$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$. Cette intégrale est impropre en $0$ si $a<1$, impropre en $1$ si $b<1$. Par un discours analogue à ce qui précède on obtient que $B(a,b)$ est bien défini ssi $a, b \in ]0,+\infty[$ >

1) En faisant le changement de variable $t = u^2$ ($u \mapsto u^2$ est un $C^1$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$) on obtient pour $a>0$

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt = \int_0^{+\infty} 2 e^{-u^2} u^{2a-1} du$$

Maintenant

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \left(\int_0^{+\infty} 2 e^{-u^2} u^{2a-1} du\right)\left(\int_0^{+\infty} 2 e^{-v^2} v^{2a-1} dv\right) = 4\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} e^{-v^2} u^{2a-1} v^{2a-1} du\right) dv$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2a-1} v^{2b-1} du\right) dv$$

$$= 4\int_{(\mathbb{R}_+)^2} e^{-(u^2+v^2)} u^{2a-1} v^{2b-1} du\, dv \quad \text{par le thm de Fubini}$$

On fait le changement de variable $(u,v) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rightsquigarrow (du, dv) = ((d\rho)\cos\theta - \rho\sin\theta\, d\theta, (d\rho)\sin\theta + \rho\cos\theta\, d\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \end{pmatrix}$

Le déterminant de la matrice jacobienne est $\rho$.

$(\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est un $C^1$ difféomorphisme $]-\pi,\pi[ \times ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty,0] \times \{0\})$

On obtient

$$4\int_{(\mathbb{R}_+)^2} e^{-(u^2+v^2)} u^{2a-1} v^{2b-1} du\, dv = 4\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \rho^{2a-1} \rho^{2b-1} (\cos\theta)^{2a-1} (\sin\theta)^{2b-1} \rho\, d\theta\right) d\rho \quad \text{(Attention aux bornes !)}$$

$$= 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho^{2a+2b-1} d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2a-1} (\sin\theta)^{2b-1} d\theta\right)$$

On reconnaît $2\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho^{2a+2b-1} d\rho = \Gamma(a+b)$

Pour la deuxième intégrale on fait le changement de variable $u = \sin^2\theta$ alors $du = 2\sin\theta\cos\theta$ et $(\cos\theta)^{2a-2} = (\cos^2\theta)^{a-1} = (1-u)^{a-1}$

on obtient $2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2a-1} (\sin\theta)^{2b-1} d\theta = \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta)^{a-1} (\sin^2\theta)^{b-1}\, 2\cos\theta\sin\theta\, d\theta = \int_0^1 (1-u)^{a-1} u^{b-1} du$

En faisant le changement de variable $v = 1-u$ on observe $\int_0^1 (1-u)^{a-1} u^{b-1} du = \int_0^1 v^{a-1} (1-v)^{b-1} dv = B(a,b)$

Conclusion $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) B(a,b)$ pour tout $a, b \in ]0,+\infty[$

Pour obtenir la formule indiquée il faut vérifier $\Gamma(a+b) \neq 0$. Or $\Gamma(a+b)$ est l'intégrale sur $]0,+\infty[$ d'une fonction continue strictement positive donc $\Gamma(a+b) > 0$

2) Pour $a>0$ on pose $f_a(t) = \dfrac{e^{-t}t^{a-1}}{\Gamma(a)} 1_{]0,+\infty[}(t)$ autrement dit $f_a(t)=0$ si $t\leq 0$

$f_a(t) = \dfrac{e^{-t}t^{a-1}}{\Gamma(a)}$ si $t>0$

$\langle$ $f_a$ est bien une densité de variable aléatoire puisqu'elle est positive, intégrable et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}t^{a-1}}{\Gamma(a)}\,dt = 1$ $\rangle$

Soit $X_a$ variable aléatoire admettant $f_a$ pour densité. Soit $n$ un entier $>0$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a $P(X_n \geq \lambda) = \int_\lambda^{+\infty} f_n(t)\,dt$ par définition de la loi de $X_n$, donc $P(X_n\geq\lambda) = \int_\lambda^{+\infty} \frac{e^{-t}t^{n-1}}{\Gamma(n)}\,dt$

(Pour $\lambda<0$ on a $P(X_n\geq\lambda) = \int_\lambda^0 f_n(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 0+1 = 1$ )

Pour $n=1$ on a $P(X_1\geq\lambda) = \int_\lambda^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\Gamma(1)}\,dt = \frac{1}{\Gamma(1)}\left[-e^{-t}\right]_\lambda^{+\infty} = \frac{e^{-\lambda}}{\Gamma(1)}$ et $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$

donc $P(X_1\geq\lambda) = e^{-\lambda}$.

On va établir pour $n\geq 1$ une relation de récurrence entre les $P(X_n\geq\lambda)$ en faisant une intégration par parties :

pour $n\geq 2$ on a
$$\int_\lambda^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-t} t^{n-1}\,dt = \frac{1}{\Gamma(n)}\left[-e^{-t}t^{n-1}\right]_\lambda^{+\infty} - \frac{1}{\Gamma(n)}\int_\lambda^{+\infty} -e^{-t}(n-1)t^{n-2}\,dt$$
$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{\Gamma(n)} + (n-1)\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} P(X_{n-1}\geq\lambda)$$

Si on spécifie $\lambda=0$ on obtient en particulier $1 = 0 + (n-1)\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)}$ donc $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$. Or $\Gamma(1)=1$ donc par récurrence sur $n$ on a $\Gamma(n) = (n-1)!$ (attention de ne pas commencer la récurrence à $n=0$ : l'expression $1 = 0 + \frac{(n-1)\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)}$ n'est vraie (et n'a de sens) que si $n\geq 2$)

Conclusion $P(X_n\geq\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + P(X_{n-1}\geq\lambda)$

On a déjà calculé $P(X_1\geq\lambda) = e^{-\lambda}$. Par récurrence sur $n$ on a $P(X_n\geq\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

II Si $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ on pose $G(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k)$ qu'on considère comme une série entière en $z$.

$X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ ($n\in\mathbb{N}^*$, $p\in[0,1]$) $\Leftrightarrow$ $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ si $k\in\{0,\dots,n\}$

$=0$ sinon (Vérifier qu'on a bien $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$)

On calcule $G(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pz)^k(1-p)^{n-k}$

$= (pz+1-p)^n$ par la formule du binôme

$X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ ($\lambda>0$) $\Leftrightarrow$ $P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ (Vérifier qu'on a bien $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$)

alors $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$

III On note $S_n$ l'ensemble des bijections $\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$. $S_n$ est un ensemble fini avec $n!$ éléments.

Soit $\mu_n$ la mesure uniforme sur $S_n$, donc si $A$ est une partie de $S_n$ on a $\mu_n(A) = \dfrac{|A|}{|S_n|} = \dfrac{|A|}{n!}$ où $|A|$ désigne le cardinal de $A$.

Soit $X_n$ la variable aléatoire $S_n \to \mathbb{N}$, $\sigma \mapsto |\{i \in \{1,\dots,n\}, \sigma(i) = i\}|$. On veut étudier la loi de $X_n$

1) $X_n = 0$ désigne l'événement $\{\sigma \in S_n, \sigma(i) \neq i \ \forall i\}$. Son complémentaire $X_n > 0$ est l'événement $\{\sigma \in S_n, \exists i, \sigma(i) = i\}$ qu'on peut écrire comme la réunion ~~des événements~~ $\{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1\} \cup \{\sigma \in S_n, \sigma(2) = 2\} \cup \dots \cup \{\sigma \in S_n, \sigma(n) = n\}$. Cette réunion n'est pas disjointe, on va utiliser la formule de Poincaré après avoir décrit les intersections de ces événements.

On introduit deux notations : - Si $A$ est une partie de $\mathbb{N}$ on note $S_A$ l'ensemble des bijections de $A$ dans $A$

- Si $B$ est une partie de $A$ avec $A \subset \mathbb{N}$ on note $S_A^B$ le sous ensemble de $S_A$ formé des bijections qui sont l'identité sur $B$

On a donc $S_n = S_{\{1,\dots,n\}}$ et $\{\sigma \in S_n, \sigma(1) = 1\} = S^{\{1\}}_{\{1,\dots,n\}}$

On observe les ~~deux pour~~ trois propriétés suivantes : (i) Si $A$ est en bijection avec $B$ alors $S_A$ est en bijection avec $S_B$. En particulier

$$|S_A| = |S_{|A|}| = |A|! \quad (\text{on convient } 0! = 1)$$

(ii) Si $B \subset A$ $S_A^B$ est en bijection avec $S_{A \setminus B}$ : la donnée d'une bijection de $A$ dans $A$ qui est l'identité sur $B$ équivaut à la donnée d'une bijection du complémentaire de $B$ dans $A$ dans lui même

En particulier $|S_A^B| = |A \setminus B|! = (|A| - |B|)!$

(iii) Pour $B, C$ deux parties de $A$ on a $S_A^B \cap S_A^C = S_A^{B \cup C}$

Venons en au calcul de $P(X_n = 0)$. On notera, pour $A \subset \{1,\dots,n\}$, $S_n^A$ l'ensemble $S^A_{\{1,\dots,n\}}$ (ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ qui sont l'identité sur $A$)

On a $P(X_n = 0) = 1 - P(X_n > 0)$ puisque les événements $X_n = 0$ et $X_n > 0$ sont complémentaires

$= 1 - P(S_n^{\{1\}} \cup \dots \cup S_n^{\{n\}})$ d'après ce qui a été dit plus haut.

$$P(S_n^{\{1\}} \cup \dots \cup S_n^{\{n\}}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(S_n^{\{i_1\}} \cap \dots \cap S_n^{\{i_k\}})$$ d'après la formule de Poincaré

Or si $i_1, \dots, i_k$ sont $k$ entiers distincts de $\{1,\dots,n\}$ on a $S_n^{\{i_1\}} \cap \dots \cap S_n^{\{i_k\}} = S_n^{\{i_1,\dots,i_k\}}$ et $P(S_n^{\{i_1,\dots,i_k\}}) = \dfrac{|S_n^{\{i_1,\dots,i_k\}}|}{n!}$

$= \dfrac{(n-k)!}{n!}$ d'après (ii)

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(S_n^{\{i_1\}} \cap \dots \cap S_n^{\{i_k\}}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{(n-k)!}{n!} \times \text{nbre de partie à } k \text{ éléments dans } \{1,\dots,n\}$$

$$= \frac{(n-k)!}{n!} \binom{n}{k} = \frac{1}{k!}$$

On obtient $P(X_n = 0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ (en convenant $0! = 1$)

Pour calculer $P(X_n=r)$, $r\in\{0,\dots,n\}$, on introduit une nouvelle notation : si $A$ est une partie de $\{1,\dots,n\}$ on note $T_n^A$ l'ensemble des bijections $\sigma$ de $\{1,\dots,n\}$ dans lui même vérifiant $\sigma(i)=i$ si $i\in A$

$\sigma(i)\neq i$ si $i\in\{1,\dots,n\}\setminus A$

On observe : - $T_n^A\cap T_n^{A'}=\emptyset$ si $A\neq A'$

- $T_n^A$ est en bijection avec $T_{n-|A|}^{\emptyset}$ ; la donnée d'une bijection de $\{1,\dots,n\}$ dans lui même ayant exactement $A$ comme sous ensemble de points fixes équivaut à la donnée d'une bijection sans point fixe de $\{1,\dots,n\}\setminus A$ dans lui même, laquelle se ramène, après renumérotation, à la donnée d'une bijection sans point fixe de $\{1,\dots,n-|A|\}$ dans lui même

- l'évènement $X_n=r$ est la réunion $\bigcup_{\substack{A\subset\{1,\dots,n\}\\ |A|=r}} T_n^A$. Cette fois c'est une réunion d'ensembles disjoints.

Donc $P(X_n=r)=P\left(\bigcup_{|A|=r}T_n^A\right)=\sum_{|A|=r}P(T_n^A)=\sum_{|A|=r}\frac{|T_n^A|}{n!}=\sum_{|A|=r}\frac{|T_{n-|A|}^{\emptyset}|}{n!}=\binom{n}{r}\frac{|T_{n-r}^{\emptyset}|}{n!}$

On a $P(X_{n-r}=0)=\frac{|T_{n-r}^{\emptyset}|}{(n-r)!}$ donc $P(X_n=r)=\binom{n}{r}\frac{1\times(n-r)!}{n!}P(X_{n-r}=0)=\frac{P(X_{n-r}=0)}{r!}$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$$ d'après le calcul de $P(X_n=0)$ (attention au domaine de validité pour $r$)

2) On écrit $G_n(z)=\sum_{k\in\mathbb{N}}z^kP(X_n=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$. On établit une relation de récurrence entre les $G_n$

Pour $n=1$ on a $S_1=\{id\}$, $X_1: id\mapsto 1$, $P(X_1=1)=1$, $G_1(z)=z$

Pour $n\geq 1$ $G_{n+1}(z)=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\sum_{i=0}^{n+1-k}\frac{(-1)^i}{i!}\right)+\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{0}\frac{(-1)^i}{i!}$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\right)+\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{(-1)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}+\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=G_n(z)+\sum_{k=0}^{n+1}\frac{z^k(-1)^{n+1-k}}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$=G_n(z)+\frac{1}{(n+1)!}(z-1)^{n+1}$$ par la formule du binôme.

On obtient alors par récurrence sur $n\geq 1$ $G_n(z)=z+\sum_{k=2}^{n}\frac{(z-1)^k}{k!}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(z-1)^k}{k!}$

---

On a $G_n'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^kP(X_n=k)$ donc sa dérivée $\ell$-ième, pour $\ell\in\mathbb{N}^*$, est $G^{(\ell)}(z)=\sum_{k=\ell}^{+\infty}k(k-1)\cdots(k-\ell+1)z^{k-\ell}P(X_n=k)$

En particulier $G^{(\ell)}(1)=\sum_{k=\ell}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-\ell+1)P(X_n=k)=E(X_n(X_n-1)\cdots(X_n-\ell+1))$ (la série converge car tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.)

(III 2) Puisque $G_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(z-1)^k}{k!}$ on a pour $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ $G_n^{(\ell)}(z) = \sum_{k=\ell}^{n} \frac{k(k-1)\cdots(k-\ell+1)}{k!}(z-1)^{k-\ell}$

$$= \sum_{k=\ell}^{n} \frac{(z-1)^{k-\ell}}{(k-\ell)!}$$

et $G_n^{(\ell)}(z) = 0$ si $\ell > n$

En particulier $G_n^{(\ell)}(1) = 1$

Pour majorer $P(X_n > x)$ on utilise l'inégalité de Tchebychev : $P(|X_n - E(X_n)| \geq x) \leq \frac{Var(X_n)}{x^2}$ pour tout $x > 0$

On calcule $E(X_n) = G_n'(1) = 1$ ( Essayer de calculer directement $E(X_n)$ : on peut le faire pratiquement sans calcul )

$$E(X_n^2) = E(X_n(X_n-1) + X_n) = E(X_n(X_n-1)) + E(X_n) = G''(1) + G'(1) = 2$$

$$Var(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 2 - 1 = 1$$

On observe ensuite $X_n - E(X_n) = X_n - 1$ est positif sauf si $X_n = 0$ donc pour $x > 1$ on a $|X_n - E(X_n)| \geq x \Leftrightarrow X_n - 1 \geq x$

$\Leftrightarrow X_n \geq x+1$

L'inégalité de Tchebychev donne donc pour $x > 1$ $P(X_n \geq x+1) \leq \frac{1}{x^2}$

Pour $x \in ]0, 1]$ $\frac{1}{x^2} \geq 1$ donc l'inégalité $P(X_n \geq x+1) \leq \frac{1}{x^2}$ est manifestement vraie

3) Pour $z \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ fixé on a $\lim_{n \to +\infty} G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!} = \exp(z-1)$. On reconnait la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre 1 calculée en II

Fixons maintenant $r \in \mathbb{N}$. On a $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = r) = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{e^{-1}}{r!}$. On reconnait $P(X = r)$ où $X$ suit la loi de Poisson de paramètre +1

IV $X_n$ de loi binomiale $B(n, p_n)$ avec $\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda$ pour un $\lambda \in ]0, +\infty[$

1) D'après II la fonction génératrice de $X_n$ est $G_n(z) = (p_n z + 1 - p_n)^n$ qu'on écrit $\exp(n \log(p_n z + 1 - p_n)) = \exp(n \log(1 + p_n(z-1)))$

$p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $o\left(\frac{1}{n}\right)$ désignant une suite de la forme $\frac{\varepsilon(n)}{n}$ avec $\varepsilon(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

donc $1 + p_n(z-1) = 1 + \frac{\lambda(z-1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $\log(1 + p_n(z-1)) = \frac{\lambda(z-1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ( puisque $\log(1+x) = x + o(x)$ au voisinage de 0)

d'où $G_n(z) = \exp(\lambda(z-1) + o(1)) = \exp(\lambda(z-1)) \exp(o(1)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(\lambda(z-1))$