2) Fixons $k \in \mathbb{N}$. On a $P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$ si $k \le n$

$= 0$ si $k > n$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = k) = \lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$

On a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!} 1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ et le produit $1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ tend vers 1 qd $n \to \infty$ (k est fixé)

$n^k p_n^k = (n p_n)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda^k$

$(1-p_n)^{n-k} = \frac{1}{(1-p_n)^k} e^{n \log(1-p_n)} = \frac{1}{(1-p_n)^k} e^{n \log\left(1-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{1}{(1-p_n)^k} e^{n\left(-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{1}{(1-p_n)^k} e^{-\lambda+o(1)}$

On a $(1-p_n)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $e^{-\lambda+o(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}$. En rassemblant $\lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

V X suivant une loi de Poisson de paramètre λ

Sa fonction caractéristique est l'application $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto E(\exp(itX)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{itn} P(X=n) = G_X(e^{it})$ où G_X est la fonction génératrice de X. On a calculé G_X en II : $G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$ d'où $\phi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$

Ecrivons $e^{it} = \cos t + i \sin t$ alors $\lambda(e^{it}-1) = \lambda(\cos t - 1) + i\lambda \sin t$ puis $\exp(\lambda(e^{it}-1)) = e^{\lambda(\cos t-1)} e^{i\lambda \sin t}$

$= e^{\lambda(\cos t - 1)}\left(\cos(\lambda \sin t) + i \sin(\lambda \sin t)\right)$

VI $\Psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

L'application $x \mapsto \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (ie l'intégrale de sa valeur absolue converge)

Sa dérivée par rapport à t $\frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(t,x) = -x \sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}}$ est majorée en valeur absolue par $g(x) = |x| e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$

On peut alors appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme (cf cours d'intégration) : Ψ est dérivable et $\Psi'(t) = -\int_{\mathbb{R}} x \sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

On intègre par parties en reconnaissant $\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$ d'où $\Psi'(t) = \left[\sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} t \cos(tx) dx$

$= 0 - t\Psi(t)$

Ψ est donc solution de l'équation différentielle $y' = -ty$ et on connait $\Psi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ puisque la densité de la loi normale somme à 1.

Pour trouver une solution ~~strictem~~ positive et ne s'annulant pas de l'éq. diff. on écrit $\frac{y'}{y} = -t$ donc $\log(y) = -\frac{t^2}{2} + cste$

$y = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{cste}$

Pour trouver toutes les solutions de l'éq. diff. on écrit $y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} z(t)$ alors $y'(t) = -t y(t) \Leftrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} z'(t) = 0 \Leftrightarrow z$ est constante

Conclusion $\Psi(t) = cste \times e^{-\frac{t^2}{2}} = \Psi(0) e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$

La loi normale centrée réduite est donnée par la densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ La loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 est donnée par la densité $f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ et on a $f = f_{0,1}$

(VI) On observe que si X est une variable aléatoire de densité f et si a,b sont des réels fixés avec $a \neq 0$ alors $aX+b$ ~~admet~~ a une loi donnée par la densité $x \mapsto \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$

En effet, supposons par ex $a>0$, on a $\forall\, \alpha<\beta$
$$P(aX+b \in [\alpha,\beta]) = P\left(X \in \left[\frac{\alpha-b}{a}, \frac{\beta-b}{a}\right]\right)$$
$$= \int_{\frac{\alpha-b}{a}}^{\frac{\beta-b}{a}} f(x)\,dx$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{a} f\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

En particulier soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0,+\infty[$, X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, alors $\sigma X+\mu$ suit la loi normale de paramètre (μ,σ)

Remarque : on voit tout de suite que $E(X)=0$, $E(\sigma X+\mu)=\mu$ et un calcul ~~très~~ rapide donne $E(X^2) = 1 = Var(X)$
$Var(\sigma X+\mu) = Var(\sigma X) = \sigma^2 Var(X) = \sigma^2$ donc $f_{\mu,\sigma}$ est la loi normale d'espérance μ et de variance σ^2

La fonction caractéristique de $\sigma X+\mu$, c'est à dire de la loi normale (μ,σ), est
$$\phi_{\sigma X+\mu}(t) = E\left(\exp(it(\sigma X+\mu))\right)$$
$$= E\left(e^{it\mu} \exp(it\sigma X)\right)$$
$$= e^{it\mu} E\left(\exp(i(t\sigma)X)\right) = e^{it\mu}\phi_X(t\sigma)$$

On calcule $\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

L'application $x \mapsto \sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ est impaire donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle. Il reste $\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

$\phi_{\sigma X+\mu}(t) = e^{it\mu}\, e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ fonction caractéristique de la loi normale (μ,σ)