L2 probabilité 2004-2005 Corrigé de la partie III de l'examen du 7 juin

1) X_1+X_2 est une va à valeurs dans $\{0,1,2\}$

$X_1+X_2=0$ est l'événement $X_1=0$ et $X_2=0$ donc $P(X_1+X_2=0)=P(X_1=0 \text{ et } X_2=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par indépendance de } X_1 \text{ avec } X_2}}{=} P(X_1=0)\,P(X_2=0) = (1-p)^2$

$X_1+X_2=1$ est l'événement $(X_1=0$ et $X_2=1)$ ou $(X_1=1$ et $X_2=0)$

donc $P(X_1+X_2=1) = P(X_1=0 \text{ et } X_2=1) + P(X_1=1 \text{ et } X_2=0)$ (réunion disjointe de deux événements)

$= P(X_1=0)P(X_2=1) + P(X_1=1)P(X_2=0)$ (indépendance de (X_1,X_2))

$= 2p(1-p)$

$X_1+X_2=2$ est l'événement $X_1=1$ et $X_2=1$ donc $P(X_1+X_2=2)=p^2$

On reconnait la loi ~~binom~~ binomiale $B(2,p)$, somme de deux Bernoulli indépendantes $B(1,p)$

$E(X_1+X_2) = 0\,P(X_1+X_2=0) + 1.\,P(X_1+X_2=1) + 2.\,P(X_1+X_2=2) = 2p(p-1)+2p^2 = 2p$

On peut aussi dire $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$ par linéarité de l'espérance

$= p+p = 2p$

2) X_1^2, X_2^2 et X_1X_2 sont des va ne prenant que les valeurs 0 ou 1. Ce sont donc des va de Bernoulli

$E(X_1^2) = 0.\,P(X_1^2=0) + 1.\,P(X_1^2=1) = P(X_1^2=1) = P(X_1=1)$ (les événements $X_1=1$ et $X_1^2=1$ sont les mêmes)

$= p$

De même $E(X_2^2)=p$

$E(X_1X_2) = P(X_1X_2=1) = P(X_1=1 \text{ et } X_2=1) = P(X_1=1)P(X_2=1) = p^2$

Maintenant $E((X_1+X_2)^2) = E(X_1^2+2X_1X_2+X_2^2) = E(X_1^2)+2E(X_1X_2)+E(X_2^2) = 2p+2p^2$

$Var(X_1+X_2) = E((X_1+X_2)^2) - (E(X_1+X_2))^2 = 2p+2p^2-(2p)^2 = 2p-2p^2$

3) X_1+X_2 et X_3 sont indépendantes si et seulement si $\forall i \in X_1+X_2(\Omega)$, $\forall j \in X_3(\Omega)$, $P(X_1+X_2=i \text{ et } X_3=j) = P(X_1+X_2=i)\,P(X_3=j)$

~~en vraifa~~

Or l'événement $X_1+X_2=i$ est la réunion (disjointe) des événements $X_1=k, X_2=i-k$, k décrivant $X_1(\Omega)=\{0,1\}$

donc $(X_1+X_2=i$ et $X_3=j)$ est la réunion disjointe des événements $(X_1=k$ et $X_2=i-k$ et $X_3=j)$, k décrivant $X_1(\Omega)$

donc $P(X_1+X_2=i \text{ et } X_3=j) = \sum_k P(X_1=k \text{ et } X_2=i-k \text{ et } X_3=j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } X_1, X_2, X_3 \text{ sont indépendantes}}}{=} \sum_k P(X_1=k)\,P(X_2=i-k)\,P(X_3=j)$

$= \left[\sum_k P(X_1=k)\,P(X_2=i-k)\right] P(X_3=j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendants}}}{=} \cancel{P(X_1+X_2=i)P(X_3=j)} \left[\sum_k P(X_1=k \text{ et } X_2=i-k)\right] P(X_3=j)$

$= P(X_1+X_2=i)\,P(X_3=j)$

Donc X_1+X_2 et X_3 sont indépendantes

4) Soit $\omega \in \Omega$. $X_3 = X_3(\omega)$ désigne l'événement $\{\omega' \in \Omega,\ X_3(\omega') = X_3(\omega)\} = X_3^{-1}(\{\omega\})$. Cet événement dépend de $\omega \in \Omega$

L'espérance conditionnelle $E(X_1+X_2 \mid X_3 = X_3(\omega))$ désigne l'espérance de X_1+X_2 pour la probabilité sur Ω donnée

par $A \mapsto P(A \mid X_3 = X_3(\omega)) = \cancel{P(A \cap (X_3 = X_3(\omega)}\ \dfrac{P(A \cap X_3^{-1}(\{\omega\}))}{P(X_3^{-1}(\{\omega\}))}$ pour $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$

L'espérance conditionnelle $E(X_1+X_2 \mid X_3)$ est la variable aléatoire $\Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto E(X_1+X_2 \mid X_3 = X_3(\omega))$

Pour $\omega \in \Omega$ fixé on a $E(X_1+X_2 \mid X_3 = X_3(\omega)) = \sum_{k=0}^{2} k\, P(X_1+X_2 = k \mid X_3 = X_3(\omega))$

Or les va X_1+X_2 et X_3 sont indépendantes donc les événements $X_1+X_2 = k$ et $X_3 = X_3(\omega)$ sont indépendants,

donc $P(X_1+X_2 = k \mid X_3 = X_3(\omega)) = P(X_1+X_2 = k)$ ~~indépen~~

On obtient $E(X_1+X_2 \mid X_3 = X_3(\omega)) = \sum_{k=0}^{2} k\, P(X_1+X_2 = k) = E(X_1+X_2)$. Ceci ne dépend pas de ω

Donc $\omega \mapsto E(X_1+X_2 \mid X_3 = X_3(\omega))$ est une application constante égale à $E(X_1+X_2)$

$E(E(X_1+X_2 \mid X_3))\ \cancel{X_3(\omega)} = E(X_1+X_2)\, P(E(X_1+X_2 \mid X_3) = E(X_1+X_2)) = E(X_1+X_2)$

5) On suppose maintenant $X_3 = 1$ si $X_1 = X_2$, $X_3 = 0$ sinon

On a $X_1+X_2 = 1 \iff (X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 1)$ ou $(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0) \iff X_3 = 0$

donc $(X_1+X_2 = 1 \text{ et } X_3 = 1)$ est l'événement $\emptyset$ (impossible) ; $P(X_1+X_2 = 1 \text{ et } X_3 = 1) = P(\emptyset) = 0$

or $P(X_1+X_2 = 1) = 2p(1-p)$ (question 1) et $P(X_3 = 1) = P(X_1 = X_2) = P((X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 0) \text{ ou } (X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1))$

$$= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$$

$$= (1-p)^2 + p^2 > 0$$

Si $p \neq 0$ et $p \neq 1$ on a $P(X_1+X_2 = 1) > 0$ puis $P(X_1+X_2 = 1)P(X_3 = 1) > 0 = P(X_1+X_2 = 1 \text{ et } X_3 = 1)$

donc X_1+X_2 et X_3 ne sont pas indépendantes

Si X_1, X_2, X_3 étaient mutuellement indépendantes on aurait X_1+X_2 indépendant de X_3 d'après la question 3, ce qui n'est pas

donc si $p \neq 0$ et $p \neq 1$ X_1, X_2, X_3 ne sont pas mutuell^t indépendantes

Remarque : si $p = 0$ ou $p = 1$ alors X_1 et X_2 sont constantes (par exemple si $p = 0$ alors $X_1 = X_2 = 0$ avec probabilité 1) donc X_3 et X_1+X_2 sont également constantes. Or les variables aléatoires constantes sont mutuellement indépendantes.

6) $E(X_3) = P(X_3 = 1) = p^2 + (1-p)^2$ (calcul fait en 5))

$E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1 + X_2) + E(X_3)$ par linéarité de l'espérance

$= 2p + p^2 + (1-p)^2 = 1 + 2p^2$

7) ~~Soit~~ Pour $\omega \in \Omega$ si $X_3(\omega) = 1$ alors $X_3(\omega)^2 = 1$, si $X_3(\omega) = 0$ alors $X_3(\omega)^2 = 0$. Dans les deux cas $X_3^2(\omega) = X_3(\omega)$

donc $X_3^2 = X_3$ comme variable aléatoire

$\left.\begin{array}{l} X_1X_3 \\ X_1X_2 \end{array}\right|$ prend pour seules valeurs 0 et 1. $X_1(\omega)X_3(\omega) = 1 \Leftrightarrow X_1(\omega) = 1$ et $X_3(\omega) = 1$

$\Leftrightarrow X_1(\omega) = 1$ et $X_2(\omega) = X_1(\omega)$

$\Leftrightarrow X_1(\omega) = 1$ et $X_2(\omega) = 1$

$\Leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega) = 1$

On a donc $\forall \omega \in \Omega$ $X_1X_3(\omega) = X_1X_2(\omega)$ donc $X_1X_3 = X_1X_2$ comme variable aléatoire

On montre de même $X_2X_3 = X_1X_2$

$E((X_1+X_2+X_3)^2) = E\left((X_1+X_2)^2 + 2(X_1+X_2)X_3 + X_3^2\right) = E((X_1+X_2)^2) + 2E(X_1X_3) + 2E(X_2X_3) + E(X_3^2)$

On a $E(X_1X_3) = E(X_2X_3) = E(X_1X_2)$

$= p^2$ d'après les calculs de 2)

$E(X_3^2) = E(X_3) = p^2 + (1-p)^2$ d'après les calculs de 6)

On obtient $E((X_1+X_2+X_3)^2) = 2p + 2p^2 + 4p^2 + p^2 + (1-p)^2 = 1 + 8p^2$

$\mathrm{Var}(X_1+X_2+X_3) = E((X_1+X_2+X_3)^2) - (E(X_1+X_2+X_3))^2 = 1 + 8p^2 - (1+2p^2)^2 = 4p^2 - 4p^4$

8) On suppose $p = \frac{1}{2}$. On sait déjà que X_1 est indépendante de X_2

On calcule $P(X_1 = 1$ et $X_3 = 1) = P(X_1 = 1$ et $X_2 = 1) = p^2 = \frac{1}{4}$

$P(X_1 = 1)P(X_3 = 1) = p(p^2 + (1-p)^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Donc $P(X_1 = 1$ et $X_3 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_3 = 1)$. Ceci suffit pour montrer que X_1 et X_3 sont indépendantes. On a par exemple

$P(X_1 = 1$ et $X_3 = 0) + P(X_1 = 1$ et $X_3 = 1) = P(X_1 = 1)$ puisque l'événement $X_1 = 1$ est réunion disjointe des événements $(X_1 = 1$ et $X_3 = 0)$ et $(X_1 = 1$ et $X_3 = 1)$

Donc $P(X_1 = 1$ et $X_3 = 0) = P(X_1 = 1) - P(X_1 = 1)P(X_3 = 1) = P(X_1 = 1)(1 - P(X_3 = 1)) = P(X_1 = 1)P(X_3 = 0)$

De même $P(X_1 = 0$ et $X_3 = 1) = P(X_3 = 1) - P(X_1 = 1)P(X_3 = 1) = P(X_3 = 1)(1 - P(X_1 = 0)) = P(X_3 = 1)P(X_1 = 0)$

$P(X_1 = 0$ et $X_3 = 0) = P(X_1 = 0) - P(X_1 = 0$ et $X_3 = 1) = P(X_1 = 0)(1 - P(X_3 = 1)) = P(X_1 = 0)P(X_3 = 0)$

On montre de même que X_2 et X_3 sont indépendants (on peut échanger X_1 avec X_2 ci-dessus)

Commentaire : On sait que X_1+X_2 et X_3 ne sont pas indépendantes (question 5) donc que X_1, X_2, X_3 ne sont pas mutuellement indépendantes.

Calculons $E((X_1+X_2)X_3) = E(X_1X_3 + X_2X_3) = E(X_1X_3) + E(X_2X_3)$

$= E(X_1)E(X_3) + E(X_2)E(X_3)$ puisque X_1 est indépendante de X_3, de même X_2 $(p = \frac{1}{2})$

$= [E(X_1) + E(X_2)]E(X_3)$

$= E(X_1+X_2)E(X_3)$

On a donc deux va X_1+X_2 et X_3 non indépendantes mais vérifiant $E((X_1+X_2)X_3) = E(X_1+X_2)E(X_3)$

C'est un contre exemple à la réciproque du théorème X, Y indépendantes $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

Ceci se reformule avec la covariance $\mathrm{cov}(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y)))$: On a $E(XY) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow$

$\mathrm{cov}(X,Y) = 0$