L3 proba 2005-06 Corrigé de l'examen

Ex 1. $X_1, \dots, X_n$ iid de densité $\frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} 1_{]0,+\infty[}(x)$ avec $\theta > 0$

1) $E(X_1) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X_1}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \underbrace{\frac{2\theta^3}{\theta^2}}_{=2\theta}$ (Formulaire)

$E(X_1^2) = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{6\theta^4}{\theta^2} = 6\theta^2$

$Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 6\theta^2 - 4\theta^2 = 2\theta^2$

2) On pose $f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1}{\theta^2} e^{-\frac{x_1}{\theta}} \dots \frac{x_n}{\theta^2} e^{-\frac{x_n}{\theta}} = \frac{x_1 \dots x_n}{\theta^{2n}} e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}}$ f_θ est la densité du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$

On cherche $\theta > 0$ tq $f_\theta(x_1, \dots, x_n)$ soit maximal ($(x_1, \dots, x_n)$ étant fixé avec $f_\theta(x_1, \dots, x_n) > 0$). On calcule

$\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \frac{-2n\, x_1 \dots x_n}{\theta^{2n+1}} e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} + \frac{\sum x_i}{\theta^2} \frac{x_1 \dots x_n}{\theta^{2n}} e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}}$ (on suppose $(x_1, \dots, x_n) \in]0,+\infty[^n$)

$= \frac{x_1 \dots x_n}{\theta^{2n+1}} e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} \left[-2n + \frac{\sum x_i}{\theta}\right]$

$\frac{\partial f}{\partial \theta}$ s'annule pour $\theta = \frac{\sum x_i}{2n}$, est positif pour $\theta \in]0, \frac{\sum x_i}{2n}[$ et négatif pour $\theta \in [\frac{\sum x_i}{2n}, +\infty[$ donc, à $(x_1, \dots, x_n) \in]0,+\infty[^n$ fixé,

$f_\theta(x_1, \dots, x_n)$ est maximal pour $\theta = \frac{\sum x_i}{2n}$

On pose alors $\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{2n}$ estimateur du maximum de vraisemblance.

3) $\sqrt{2n}\, \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot 2\theta}{\sqrt{n}\sqrt{2}\,\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n E(X_1)}{\sqrt{n}\sqrt{Var(X_1)}} \xrightarrow{loi} N(0,1)$ par le théorème central limite (les X_i sont iid et $E(X_1^2)$ existe)

(loi normale d'espérance 0 de variance 1)

On sait d'autre part que $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{p.s} E(X_1) = 2\theta$ par la loi forte des grands nombres (les X_i sont iid et X_1 est L^1) donc $\hat{\theta}_n \xrightarrow{ps} \theta$

On en déduit $\sqrt{2n}\, \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\hat{\theta}_n} \xrightarrow{loi} N(0,1)$ par le lemme de Slutski

4) Soit z_5 tq $P(|Z| > z_5) = 5\%$ où $Z \sim N(0,1)$

Pour n grand on aura (asymptotiquement) $P\left(\left|\sqrt{2n}\, \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\hat{\theta}_n}\right| > z_5\right) = 5\%$

Or $P\left(\left|\frac{\sqrt{2n}}{\hat{\theta}_n}(\hat{\theta}_n - \theta)\right| > z_5\right) = P\left(|\hat{\theta}_n - \theta| > \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{2n}} z_5\right) = P\Big(\theta \in \underbrace{\left]\hat{\theta}_n - \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{2n}} z_5, \hat{\theta}_n + \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{2n}} z_5\right[}_{\text{intervalle de confiance}}\Big)$

Problème Soit $Y = {}^t(Y_1, \dots, Y_n)$ un vecteur gaussien de loi $N(\vec{u}_\theta, \sigma^2 I_n)$ où $\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \theta \\ 2\theta \\ \vdots \\ n\theta \end{pmatrix}$

I 1) On voit à la fonction caractéristique de $(Y_1, \dots, Y_n)$ que les Y_i sont indépendantes et suivent la loi normale $N(i\theta, \sigma^2)$

$\frac{iY_i}{q_n}$ suit donc la loi normale $N\left(\frac{i^2\theta}{q_n}, \frac{i^2\sigma^2}{q_n^2}\right)$ $\left(q_n = \sum_{j=1}^{n} j^2\right)$

Une somme de va ~~de lois~~ indépendantes de loi normale est une va de loi normale d'espérance la somme des espérances et de variance la somme des variances (on le voit par exemple en calculant la fonction caractéristique de la somme, qui par indépendance est le produit des fonctions caractéristiques).

On obtient $\hat{\theta}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{iY_i}{q_n}$ est de loi $N\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2\theta}{q_n}, \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2\sigma^2}{q_n^2}\right) = N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{q_n}\right)$

2) $P_{\vec{u}_\theta}$ projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}_\theta$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $P_{\vec{u}_\theta}(x) = \langle x, \vec{u}_\theta \rangle \frac{\vec{u}_\theta}{\|\vec{u}_\theta\|^2}$ où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Donc $P_{\vec{u}_\theta} Y = \langle Y, \vec{u}_\theta \rangle \frac{\vec{u}_\theta}{\|\vec{u}_\theta\|^2} = \sum_{i=1}^{n} i\theta Y_i \frac{\vec{u}_\theta}{\theta^2 q_n} = \frac{\hat{\theta}_n}{\theta} \vec{u}_\theta$

$\|Y - P_{\vec{u}_\theta} Y\|^2$ (au sens de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$) vaut $\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \frac{\hat{\theta}_n}{\theta} i\theta\right)^2 = (n-1)\hat{\sigma}_n^2$ avec les notations du problème.

3) $Y - P_{\vec{u}_\theta} Y = P_{\langle \vec{u}_\theta \rangle^\perp} Y$. Comme les Y_i sont indépendants, on obtient par Cochran que $P_{\vec{u}_\theta} Y$ et $P_{\langle \vec{u}_\theta \rangle^\perp} Y$ sont des va (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) indépendantes. Les v.a $P_{\vec{u}_\theta} Y$ et $\|P_{\langle \vec{u}_\theta \rangle^\perp} Y\|^2$ sont donc également indépendantes, donc également $\frac{\theta}{\|\vec{u}_\theta\|^2} \langle P_{\vec{u}_\theta} Y, \vec{u}_\theta \rangle$ et $\frac{1}{n-1} \|P_{\langle \vec{u}_\theta \rangle^\perp} Y\|^2$ (fonctions de va indépendantes), c'est à dire $\hat{\theta}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$.

II 1) On a $(n-1)\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \|Y - P_{\vec{u}_\theta} Y\|^2$ d'après I 2)

Toujours d'après I 2 $P_{\vec{u}_\theta} Y = \langle Y, \vec{u}_\theta \rangle \frac{\vec{u}_\theta}{\|\vec{u}_\theta\|^2} = \frac{1}{\|\vec{u}_\theta\|^2} (\vec{u}_\theta {}^t\vec{u}_\theta) Y$ donc $Y - P_{\vec{u}_\theta} Y = \left(I_n - \frac{1}{\|\vec{u}_\theta\|^2} \vec{u}_\theta {}^t\vec{u}_\theta\right) Y$

la matrice $\frac{1}{\|\vec{u}_\theta\|^2} \vec{u}_\theta {}^t\vec{u}_\theta$ est ~~symétrique et de rang 1~~ ~~est~~ la matrice d'une projection orthogonale sur une droite vectorielle donc est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on le comprend en complétant le vecteur $\frac{\vec{u}_\theta}{\|\vec{u}_\theta\|}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.). Donc $\left(I_n - \frac{1}{\|\vec{u}_\theta\|^2} \vec{u}_\theta {}^t\vec{u}_\theta\right)$ est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, AY est un vecteur gaussien de matrice de covariance $A \Sigma_Y {}^tA$, où Σ_Y est la matrice de covariance de Y, et d'espérance $A\,E(Y)$. Posons $A = I_n - \frac{1}{\|\vec{u}_\theta\|^2} \vec{u}_\theta {}^t\vec{u}_\theta$ et soit Q matrice orthogonale telle que $QAQ^{-1} = QA{}^tQ = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\frac{1}{\sigma^2} \|Y - P_{\vec{u}_\theta} Y\|^2 = \|\frac{1}{\sigma} AY\|^2 = \|Q \frac{1}{\sigma} AY\|^2$ car Q est orthogonale

$\frac{1}{\sigma} QAY$ est un vecteur gaussien de matrice de covariance $\frac{1}{\sigma} QA \sigma^2 I_n \frac{1}{\sigma} {}^tA {}^tQ = QA{}^tAQ^{-1} = QAQ^{-1} Q {}^tAQ^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'espérance $\frac{1}{\sigma} QA\,E(Y) = \frac{1}{\sigma} QA\vec{u}_\theta$. A est la matrice de la projection orthogonale sur $\langle \vec{u}_\theta \rangle^\perp$ donc $A\vec{u}_\theta = 0$.

Conclusion : $\frac{1}{\sigma} QAY$ est un vecteur dont les composantes sont indépendantes, les $n-1$ premières suivant la loi $N(0,1)$, la dernière étant égale à 0 presque sûrement. Donc $\|\frac{1}{\sigma} QAY\|^2$ est la somme des ~~aaa~~ carrés de $n-1$ va indépendantes de loi $N(0,1)$ donc la loi du χ^2 à $n-1$ degré de liberté.

$$\sqrt{\frac{q_n}{\hat{\sigma}_n^2}}\,(\hat{\theta}_n - \theta) = \frac{\sqrt{\frac{q_n}{\sigma^2}}\,(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\,\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}}}.$$

D'après I 1) $\hat{\theta}_n$ suit la loi $N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{q_n}\right)$ donc $\sqrt{\frac{q_n}{\sigma^2}}\,(\hat{\theta}_n - \theta)$ suit la loi $N(0,1)$. D'après II 1) $\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$ suit la loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté. D'après I 3), $\hat{\theta}_n$ et $\hat{\sigma}_n$ sont indépendantes donc également $\sqrt{\frac{q_n}{\sigma^2}}\,(\hat{\theta}_n - \theta)$ et $\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$. On obtient que $\sqrt{\frac{q_n}{\hat{\sigma}_n^2}}\,(\hat{\theta}_n - \theta)$ suit la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

2) $P\left(\left|\sqrt{\frac{q_n}{\hat{\sigma}_n^2}}\,(\hat{\theta}_n - \theta)\right| > t_2\right) = 2\% = P\left(|\hat{\theta}_n - \theta| > t_2\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{q_n}}\right) = P\left(\theta \in \left]\hat{\theta}_n - t_2\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{q_n}}, \hat{\theta}_n + t_2\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{q_n}}\right[\right)$