III Problème (8 points)

Dans tout le problème p est un réel compris entre 0 et 1, et X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(1,p)$ (c'est-à-dire prenant la valeur 1 avec probabilité p et la valeur 0 avec probabilité $1-p$).

1. Déterminer la loi puis l'espérance de $X_1 + X_2$.
2. Montrer que X_1^2, X_2^2 et $X_1 X_2$ sont des variables aléatoires de Bernouilli dont on déterminera les espérances respectives. En déduire $\mathrm{E}((X_1+X_2)^2)$ puis la variance de $X_1 + X_2$.

   Soit X_3 une autre variable aléatoire de Bernouilli. On suppose d'abord que les variables aléatoires (X_1, X_2, X_3) sont mutuellement indépendantes.

3. Montrer que $X_1 + X_2$ et X_3 sont indépendantes.
4. Montrer que l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}(X_1 + X_2 | X_3)$ est une variable aléatoire constante égale à $\mathrm{E}(X_1 + X_2)$. Que vaut son espérance ?

   On suppose maintenant que X_3 vaut 1 si $X_1 = X_2$ et que X_3 vaut 0 sinon.

5. Les variables $X_1 + X_2$ et X_3 sont-elles indépendantes ? Qu'en est-il de la famille (X_1, X_2, X_3) ?
6. Calculer $\mathrm{E}(X_3)$ puis $\mathrm{E}(X_1 + X_2 + X_3)$.
7. Montrer les égalités $X_3^2 = X_3$, $X_1 X_3 = X_1 X_2$, $X_2 X_3 = X_1 X_2$. En déduire $\mathrm{E}((X_1 + X_2 + X_3)^2)$ puis la variance de $X_1 + X_2 + X_3$.
8. On suppose $p = \frac{1}{2}$. Montrer que les couples (X_1, X_2), (X_1, X_3), (X_2, X_3) sont des couples de variables aléatoires indépendantes.