UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **Année Universitaire 2002-2003**
DEUG MIAS MP et MI 2ème année UEF6 **Examen du 17 Juin 2003**

PROBABILITES

I. Sondage

Il s'agit d'un sondage d'audience télé, commandé par une chaîne à un organisme spécialisé pour l'une de ses nouvelles émissions. Cet organisme procède par appels téléphoniques à travers le pays de la manière suivante :

- une rapide et limitée série d'appels permet d'estimer une première fourchette d'audience à coup sûr entre 10 et 20% parmi les téléspectateurs de la tranche horaire considérée.
- on procède ensuite à N appels. La question posée étant chaque fois: « regardez vous, oui ou non, l'émission en question ». L'étude démographique et sociologique préalable de l'échantillon choisi permet d'admettre que chaque appel puisse être considéré comme relevant de la même loi de Bernoulli, avec valeur 1 si « oui » et 0 si « non », et espérance p. Ce nombre p est ici le pourcentage « vrai » de l'audience, but affirmé du sondage, et qui est donc compris entre $p_1 = 0,1$ et $p_2 = 0,2$ suite au test préliminaire. Les conditions techniques assurent par ailleurs l'indépendance des appels.

L'organisme de sondage s'est engagé à fournir la valeur de p avec une erreur n'excédant pas 0,01, et ceci avec une probabilité d'au moins 0,95.

On appelle X la variable aléatoire attachée à la procédure des N appels et dont les valeurs sont le nombre de « oui » récoltés. La fiabilité théorique de l'opération est ainsi donnée par la v.a. : $Y = (X/N) - p$.

1) Quelle est la nature de la v.a. X ? Donner son espérance et sa variance en fonction de N et p.

2) On considère les v.a. X_1 et X_2 dont les valeurs sont celles de X pour les deux bornes de la fourchette-test . On définit ainsi $Y_1 = (X_1/N) - p_1$ et $Y_2 = (X_2/N) - p_2$.

Déterminer dans les 2 cas le nombre minimal d'appels permettant de satisfaire ce contrat en utilisant le théorème central limite. Il s'agit bien de trouver les valeurs minimales N_1 et N_2 de N telles que :

$$P\{-0,01 \leq Y_i \leq 0,01\} \geq 0,95 \qquad \text{pour } i = 1,2.$$

3) Quel nombre d'appels doit-on finalement prévoir pour remplir correctement le contrat ? Avec quelle probabilité un résultat à 1% prés est il fourni si l'on se limite à 1600 appels ?

II. Approximation de Sterling de n !

Soient $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires de Poisson indépendantes, chacune de moyenne (et de variance) égale à 1.

1) On considère $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que S_n est aussi une v.a. de Poisson.

Pour cela, démontrer la propriété pour n = 2 en calculant, pour tout k, $P\{X_1 + X_2 = k\}$, et établir par récurrence l'expression de $P\{ S_n = k \}$. Quelles sont l'espérance et la variance de S_n ?

2) On décide par ailleurs de calculer approximativement la probabilité $P\{ S_n = n \}$ en utilisant le théorème central limite.

i) Remarquer que $P\{ S_n = n \} = P\{ n-1 < S_n \leq n \}$

ii) Montrer que, pour n grand :

$$P\{S_n = n\} \approx (2\pi)^{-1/2} \int_{\frac{-1}{\sqrt{n}}}^{0} \exp(-\frac{x^2}{2})dx \approx (2\pi n)^{-1/2}$$

3) Déduire des 2 résultats précédents l'approximation de Sterling :

$$n! \approx n^{n+½} e^{-n} (2\pi)^{1/2}$$

III. Variables aléatoires conjointes

Soient X et Y deux variables aléatoires continues à valeurs dans $]0, +\infty[$. Elles sont conjointement continues avec la densité conjointe suivante :

$$f(x,y) = \frac{2}{(1+x+y)^3} \quad \text{si } x>0 \text{ et } y>0 \,,$$
$$= 0 \text{ autrement.}$$

1) Déterminer les lois respectives de X et Y (les densités marginales de la densité conjointe)
2) Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
3) On considère la v.a. Z = X + Y. Calculer sa fonction de répartition, et en déduire sa densité.
4) La v.a. X admet –elle une espérance, un moment d'ordre quelconque ?

Rappel 1. *La loi P_λ d'une v.a. de Poisson X est la loi définie, pour $\lambda > 0$, par :*

$$P_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \delta_n \,, \quad \textit{c'est à dire que } P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rappel 2. Théorème Central Limite
Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées, de même espérance m et variance σ^2. Alors la distribution de la variable aléatoire

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \ (X_1 + X_2 + \ldots + X_N - Nm) \quad \textit{tend vers la distribution normale lorsque } N \to \infty$$

ce qui signifie que, pour tout $x \in R$, on a :

$$P\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \ (X_1 + X_2 + \ldots + X_N - Nm) \leq x \right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\tfrac{1}{2} y^2)\, dy \quad \textit{quand } N \to \infty$$

Cas particulier (De Moivre-Laplace)
Soit X de loi binomiale $B_{N,p}$. Alors, pour tout $a < b$, on a

$$\textit{Limite pour } N \to \infty \ \textit{de } P\left\{ a \leq \frac{X - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq b \right\} = \boldsymbol{\Phi}(b) - \boldsymbol{\Phi}(a)$$

Document fourni *: tables de valeurs de la distribution normale $\boldsymbol{\Phi}(t)$.*