Université de Nice, DEUG MP2/MI2 – 2002-03, T.D. de probabilité **Feuille 1**

1. Soient A et B deux ensembles de cardinal p et q respectivement.
Quel est le cardinal de l'ensemble produit $A \times B$? de l'ensemble des applications de A dans B ?
Comment pourrait on démontrer ces formules ?

2. Soit Ω un ensemble à n éléments. On note $|A|$ le cardinal d'une partie A de Ω.
Pour A et B deux parties de Ω, donner une relation entre $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$ et $|A \cap B|$.
Donner une relation entre le cardinal de A et le cardinal du complémentaire de A dans Ω.

3. Soit Ω un ensemble à n éléments.
Y a t-il des applications injectives de Ω dans Ω qui ne soient pas surjectives ?
Combien y a t-il d'applications surjectives de Ω dans Ω ?
Comparer le nombre de bijections de Ω dans Ω et le nombre d'applications de Ω dans Ω lorsque n est grand.

4. Soit Ω un ensemble à n éléments. A toute partie A de Ω on associe l'application $\mathbf{1}_A$ de Ω dans la paire $\{0, 1\}$ définie par

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega,\ \mathbf{1}_A(\omega) &= 1 \text{ si } \omega \text{ est dans } A, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Que peut on dire de l'application $A \mapsto \mathbf{1}_A$? Combien y a t-il d'applications de Ω dans $\{0, 1\}$? Combien y a t-il de parties de Ω ?

5. Donner une interprétation combinatoire des formules suivantes faisant intervenir les coefficients binomiaux $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$:

$$\mathrm{C}_n^0 = 1,\ \mathrm{C}_n^n = 1,$$

$$\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k},$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^n \mathrm{C}_n^k = 2^n,$$

$$\mathrm{C}_{n+1}^{k+1} = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1},$$

$$\mathrm{C}_{n+1}^{k+1} = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_{n-1}^k + \cdots + \mathrm{C}_k^k$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^p \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_m^{p-k} = \mathrm{C}_{m+n}^p.$$

Montrer l'égalité $\sum_{k=0}^n (\mathrm{C}_n^k)^2 = \mathrm{C}_{2n}^n$.

6. Combien y a t-il de suites binaires (suites formées de 0 et de 1) de longueur $2n$ qui contiennent autant de 0 parmis les n premiers termes que parmis les n derniers ?

7. Avec un jeu de 32 cartes (4 couleurs, 8 hauteurs), combien peut on former de mains de 8 cartes contenant exactement 3 dames et 5 carreaux ?

8. Avec un jeu de 52 cartes, combien peut on former de mains de 5 cartes contenant deux paires (de hauteurs différentes) ? contenant 3 cartes de même hauteur et une paire (d'une autre hauteur) ?

9. Donner la liste des applications $\{1, \ldots, 4\} \to \{1, \ldots, 4\}$ ayant exactement un point fixe puis de celles ayant exactement deux points fixes.
Combien y a t-il d'applications sans point fixe de $\{1, \ldots, 4\}$ dans lui même ?
Que proposez vous pour calculer le nombre d'applications sans point fixe de $\{1, \ldots, 10\}$ dans lui même ?

∞. Que proposez vous comme probabilité pour qu'un nombre pris au hasard soit divisible par 2 et par 5 ?