L3 Mathématiques **Probabilités** **2005-2006**

Feuille d'exercices n°1

I. Soient les intégrales, définies pour tous $a,b>0$, $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}\exp(-t)\,t^{a-1}dt$ et $\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$.

1) Montrer que $\Gamma(a)\Gamma(b)=4\int_{\mathbf{R}_+^2}\exp\left(-\left(u^2+v^2\right)\right)u^{2a-1}\,v^{2b-1}\,du\,dv$.

En déduire, en utilisant un changement de variables polaire, la formule $\mathrm{B}(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

2) Soient, pour tout $a>0$, $\mathrm{f}_a(t)=\dfrac{\exp(-t)\,t^{a-1}}{\Gamma(a)}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$ et X_a une variable aléatoire admettant f_a pour densité.

Montrer, pour tout $r\in\mathbf{N}^*$, on a la relation $\mathrm{P}(X_r\geq\lambda)=\sum_{k=0}^{r-1}\exp(-\lambda)\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

II. Déterminer $\mathrm{G}(s)=\mathrm{E}\left(s^X\right)$, (fonction génératrice de X), lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p ; une loi de Poisson de paramètre λ.

III. Pour $n\in\mathbf{N}^*$, on considère $S_n=\{\text{permutations de }(1,2,..,n)\}$ et l'espace probabilisé $\left(S_n,\mathcal{P}(S_n),\mu_n\right)$ où μ_n est la mesure uniforme.
On dit que la permutation σ présente une rencontre en i si $\sigma(i)=i$.
Soit X_n la variable aléatoire définie par $X_n(\sigma)=$ nombre de rencontres de σ.

1) Montrer, en utilisant la formule de Poincaré (*), que $\mathrm{P}(X_n=0)=\sum_{i=0}^{n}\dfrac{(-1)^i}{i!}$.

En déduire que $\mathrm{P}(X_n=r)=\dfrac{1}{r!}\sum_{i=0}^{n-r}\dfrac{(-1)^i}{i!}$, si $r\in\{0,1,..n\}$ et $\mathrm{P}(X_n=r)=0$ sinon.

2) Montrer que la fonction génératrice G_n de X_n, $\mathrm{G}_n(s)=\mathrm{E}\left(s^{X_n}\right)$, est égale à $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(s-1)^k}{k!}$.

En déduire les moments factoriels de X_n : $\mathrm{E}\left(X_n(X_n-1)...(X_n-l+1)\right)$, pour $l\in\mathbf{N}^*$.

Montrer, en utilisant l'inégalité de Tchebychev, que pour tout $x>1$ et tout $n\geq 2$, on a $\mathrm{P}(X_n>x)\leq\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

3) Déterminer la limite G, quand $n\to+\infty$, de G_n. De quelle loi G est-t-elle la fonction génératrice ?
Etudier la limite, pour r fixé, quand $n\to+\infty$, de $\mathrm{P}(X_n=r)$. Comparer avec le résultat précédent.

IV. Soit, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, X_n une v.a de loi binomiale de paramètres n et p_n.
Lorsque la suite $(p_n)_n$ a la propriété $\lim_{n\to+\infty}n\,p_n=\lambda$, où λ est un réel >0, déterminer :

1) la limite de la suite $(\mathrm{G}_n)_n$ des fonctions génératrices des X_n ;

2) pour k fixé, la limite, quand $n\to+\infty$, de $\mathrm{P}(X_n=k)$.

V. Déterminer la fonction caractéristique d'une loi de Poisson.

VI. Soit ψ la fonction, de la variable réelle t, définie par $\psi(t) = \int_{\mathbf{R}} \cos(tx) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx$.

Montrer que ψ est dérivable et expliciter cette dérivée sous forme d'intégrale.
En intégrant par parties, déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par ψ.
En déduire $\psi(t)$.
Déterminer la fonction caractéristique d'une loi normale centrée, réduite.
Exprimer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $aX + b$ en fonction de celle de X.
Déterminer la fonction caractéristique d'une loi normale de paramètres μ et σ.

* Formule de Poincaré :

$$\mathrm{P}\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathrm{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$