

- **1** Soit n évènements A_i ($i = 1, 2, \dots, n$); démontrer la formule de Poincaré

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k^{(n)},$$

où

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Dans les exercices qui suivent définir l'ensemble fondamental Ω , ainsi que les parties de Ω décrites dans les énoncés.

- **2** Une urne contient n_1 boules rouges et n_2 boules noires. On tire au hasard $k_1 + k_2$ boules. Quelle est la probabilité d'obtenir k_1 boules rouges et k_2 boules noires?
- **3** Dans un trousseau de 10 clés, seule une des clés ouvre une certaine porte. En choisissant, une après l'autre, les clés au hasard et en éliminant les clés qui ne marchent pas, quelle est la probabilité de réussir à ouvrir la porte au 6ième essai?
- **4** n couples mariés vont au bal. Les couples de danseurs se forment au hasard de telle sorte que chaque cavalier a la même probabilité de danser avec n'importe quelle cavalière. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un mari danse avec sa propre femme?
- **5** On répartit au hasard r boules dans n boîtes, quelle est la probabilité pour qu'exactly m boîtes soient vides?
- **6** Un tiroir contient n paires de chaussettes. on choisit au hasard $2r$ chaussettes. Si $r \leq n$, quelle est la probabilité pour qu'on ait exactement k paires assorties?
- **7 Problème des boîtes d'allumettes de Banach**

Un fumeur a deux boites d'allumettes contenant chacune n allumettes. Sachant que, chaque fois qu'il s'allume une cigarette, il prend une allumette dans une des boîtes choisie au hasard, quelle est la probabilité p_r pour que, lorsqu'il s'aperçoit qu'une des boîtes est vide, l'autre contienne exactement r allumettes?

- **8** Soit A et B deux évènements tels que $P(A)P(B) \neq 0$.
Montrer que, si $P(A | B) > P(A)$, alors $P(B | A) > P(B)$.
- **9** Lors d'un concours de pêche, on peuple un bassin de 20% de brochets et de 80% de carpes. 20% des brochets dépassent 60 cm, alors que seulement 1% des carpes sont dans ce cas. On suppose que ces poissons ont le même appétit et donc que chacun d'entre eux possède la même (mauvaise) chance d'être au palmarès de la manifestation. Si un concurrent sort un poisson de plus de 60 cm quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'une carpe?

– **10 Problème du tricheur**

Considérons un jeu vous opposant à un adversaire : Soit p la probabilité de gagner sans tricher et q la probabilité que l'adversaire ait triché (on considère que si l'adversaire triche il gagne). Déterminer la probabilité que l'adversaire ait triché si il a gagné.

- **11** On lance n fois une pièce non biaisée ($n \geq 1$). On désigne par A l'évènement "au cours des n lancers on obtient au plus une fois pile" et par B l'évènement "au cours des n lancers on obtient au moins une fois pile et une fois face". Est-ce qu'il existe des valeurs de n pour lesquelles A et B sont indépendants ?

– **12 Problème du fumeur**

Un fumeur décide de ne plus fumer. S'il ne fume pas le jour j , il ne fumera pas le jour $j + 1$ avec la probabilité 0.8. S'il fume le jour j , il ne fumera pas le jour $j + 1$ avec la probabilité 0.1. Si on considère que le jour où le fumeur prend sa décision il ne fume pas, quelle est la probabilité qu'il ne fume pas le jour 30.

- **13** Une urne contient une boule blanche. On lance une pièce non biaisée. Si on obtient pile on rajoute une boule noire, si on obtient face on tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer la boule blanche ?
- **14** Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. On retire une des boules de l'urne l'urne sans regarder sa couleur. On tire une autre boule ; quelle est la probabilité pour que ce soit une boule bleue ?
- **15** Lors d'un jeu télévisé, on propose à un concurrent de choisir une enveloppe parmi trois. L'une d'elle contient le prix, les autres sont vides. Le concurrent fait son choix sans ouvrir l'enveloppe, l'animateur du jeu prend une des enveloppes restantes l'ouvre et montre qu'elle est vide. Pour maximiser ses chances de gain, est-ce que le joueur doit changer ou garder l'enveloppe choisie au premier essai ? Même question avec n enveloppes dont une gagnante et l'animateur enlève k enveloppes parmi les $n - 1$ restantes.