L3 Mathématiques **Probabilités** **2005-2006**

Feuille d'exercices no 2

Indépendance

1. On considère une population dans laquelle 2% des personnes sont atteintes d'une vilaine maladie. On sait en outre que 80% des personnes sont vaccinées contre cette maladie, et que la probabilité pour une personne non vaccinée d'être malade est de 9/100. Le fait d'être malade est-il indépendant du fait d'être vacciné ?

Probabilités conditionnelles

2. Une maladie rare concerne un individu sur 100 000. Un test sanguin a été développé pour la dépister avec les propriétés suivantes : Pour les individus atteints par la maladie, le test est positif à 95% ; pour les individus sains il est positif à 0.5%. Le test d'un individu est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit effectivement malade ?

Variables aléatoires indépendantes

3. a. Soient X_1, X_2 deux variables de Bernouilli indépendantes d'espérance p et q respectivement. Calculer la loi de $X_1 + X_2$. Qu'obtient on si $p = q$? Calculer $\mathrm{E}(X_1 + X_2)$ et $\mathrm{Var}(X_1 + X_2)$.

b. Soient X_1, X_2, X_3 trois variables de Bernouilli indépendantes. Montrer que $X_1 + X_2$ est indépendante de X_3.

c. Pour cette question et les suivantes on considère X_1, X_2 deux variables de Bernouilli indépendantes d'espérance p, q respectivement et X_3 la variable aléatoire définie par $X_3 = 1$ si $X_1 = X_2$, $X_3 = 0$ sinon. Les variables $X_1 + X_2$ et X_3 sont elles indépendantes ? Qu'en est il de la famille (X_1, X_2, X_3) ?

d. Calculer $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3)$.

e. On suppose $p = q = \frac{1}{2}$. Montrer que (X_1, X_2), (X_1, X_3) et (X_2, X_3) sont des couples de variables indépendantes. En déduire la covariance de $X_1 + X_2$ avec X_3. Qu'observe t-on ?

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

a. On suppose que X et Y suivent une loi de Poisson de paramètre λ et μ respectivement. Quelle est la loi de $X + Y$?

b. On suppose que X et Y suivent des lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ respectivement. Montrer que $X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1 + \sigma_2)$

c. Retrouver les résultats précédents en utilisant la fonction caractéristique d'une variable aléatoire.

5. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des varaibles aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $q_1, \ldots, q_n$ respectivement. Montrer que la v.a. $\mathrm{Min}(X_1, \ldots, X_n)$ suit la loi gémoétrique de paramètre le produit $q_1 \cdots q_n$.

6. Soient X et Y deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre λ et μ respectivement. On pose $m = \mathrm{Min}(X, Y)$ et $M = \mathrm{Max}(X, Y) - m$. Déterminer la loi du couple (m, M). Les variables m et M sont elles indépendantes ?

Le lemme de Borel Cantelli

7. Soit (A_n) une suite d'évènements de (Ω, P). On note $\limsup A_n$ l'évènement $\cap_{n=0}^{\infty}(\cup_{k=n}^{\infty} A_k)$. On note $\liminf A_n$ l'évènement $\cup_{n=0}^{\infty}(\cap_{k=n}^{\infty} A_k)$.

a. Montrer que si $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty$ alors $P(\limsup A_n) = 0$

b. On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \infty$ et que les A_n sont indépendants. Evaluer $P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k^c)$ puis $P(\liminf A_n^c)$, où A_n^c désigne le complémentaire de A_n dans Ω. En déduire par passage au complémentaire que $P(\limsup A_n) = 1$.

c. Interprétation : Montrer que la conclusion du (a) signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, sauf pour une partie d'entre eux de probabilité nulle, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\}$ est fini.

Montrer que la conclusion du (b) signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, sauf pour une partie d'entre eux de probabilité nulle, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\}$ est infini.

8. *Application.* On suppose qu'il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$ on a $P(\{nk, k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{n}$.

a. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour $p \in \mathcal{P}$, A_p l'ensemble des entiers multiples de p. Montrer que les A_p, $p \in \mathcal{P}$ sont indépendants.

b. En utilisant le fait que $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} = \infty$, montrer que tout entier n, sauf une partie d'entre eux de probabilité nulle, est multiple d'une infinité de nombre premiers distincts. Qu'en conclut on ?