1. On lance un dé équilibré à six faces décorées : A (pour Anneau), B (pour Belzébuth), C (pour Cavalier), D (pour Dragon), E (pour Elfe), F (pour Farfelu). On définit la variable aléatoire X par 2 si on obtient A, -2 si on obtient B, 0 si on obtient C, -1 si on obtient D, 1 si on obtient E, 1 si on obtient F.

a) Ecrire X sous la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, où $a_1 < \ldots < a_n$ et $(A_i)_{i=1\ldots n}$ est une partition; déterminer sa loi.

b) Même question pour $\mathrm{X}^+ = \max(\mathrm{X},0)$ et pour $|\mathrm{X}|$.

2. On dispose de n fléchettes que l'on lance une par une en direction d'une cible. La probabilité d'atteindre cette cible est, à chaque lancer, égale à p, $0 < p < 1$; les lancers sont indépendants. On note X le nombre de lancers nécessaires pour atteindre la cible pour la première fois.
Déterminer la loi de X et tracer sa fonction de répartition.

3. On considère une suite de répétitions indépendantes d'une « expérience » à deux résultats possibles A de probabilité p et $B = \overline{A}$ de probabilité $q = 1 - p$. (Voir *Note* en fin de feuille pour une modélisation.)
On note T_r, pour $r \in \mathbf{N}^*$, le nombre de répétitions nécessaires pour amener r fois A.

a) Déterminer les lois de T_1 et T_2.

b) Déterminer l'espérance et la variance de T_1.

La loi de T_1 *est appelée loi géométrique de paramètre* p.

4. Soit X une variable aléatoire géométrique.
Montrer que pour i, j entiers > 0, $\mathrm{P}(\mathrm{X} > i + j \mid \mathrm{X} > i) = \mathrm{P}(\mathrm{X} > j)$.

5. *On dit qu'une variable aléatoire* X *suit une loi de Poisson de paramètre* λ *si elle prend des valeurs entières* k *avec les probabilités* $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$.

Pour t réel positif, on désigne par $\mathrm{X}(t)$ le nombre d appels téléphoniques reçus par un standard entre les instants 0 et t. On suppose que $\mathrm{X}(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt ($\lambda > 0$ fixé). On désigne par T la variable aléatoire réelle égale à la date du premier appel reçu.

a) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq t) = \mathrm{P}(\mathrm{X}(t) \geq 1)$.

b) En déduire la loi de T.

6. On transmet un message, qui est soit « 1 », soit « -1 », par l intermédiaire de n relais $R_1, \ldots, R_n$. Le message que chaque relais R_i retransmet au relais R_{i+1} est soit le même, soit l'opposé du message qu 'il a reçu. A chaque relais R_i la probabilité que le message reçu soit le même que le message transmis par le relais précédent est p (avec $0 < p < 1$ indépendant de R_i). En outre, chaque relais retransmet correctement ou non le message indépendamment des autres relais.

a) On note X la variable aléatoire égale au nombre de retransmissions incorrectes. Quelle est la loi de X ?

b) Calculer la probabilité p_n pour que le message final soit identique au message initial. Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini?

7. Un joueur parie et mise sur un numéro compris entre 1 et 6. On jette ensuite 3 dés (équilibrés, avec des résultats indépendants). Si le nombre choisi par le joueur apparaît n fois (n = 1,2,3), celui-ci gagne n jetons. S'il n apparaît pas, il rend 1 jeton à la banque.

a) Soit X la variable aléatoire «gain du joueur lors d'une partie». Donner la loi de X.

b) Déterminer l'espérance $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ de la variable aléatoire X. Le jeu est-il honnête vis à vis du joueur?

8. Soit la fonction $\mathrm{f}(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\mathbf{1}_{[0,a]}$.

a) Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire de densité $\mathrm{f}(x)$. Déterminer sa fonction de répartition $\mathrm{F}(x)$.

9. Soit X une variable aléatoire de densité $\mathrm{f}(x)$.

a) Exprimer en fonction de $\mathrm{f}(x)$ la densité de la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \mathrm{X} + b$.

b) Même question pour les variables aléatoires $\mathrm{Y} = -\mathrm{X}$ et $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$.

10. Soit X une variable aléatoire de densité $\mathrm{f}(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\,\mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ où λ est un réel > 0.

a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

b) Déterminer la fonction de répartition $\mathrm{F}(x)$, et la fonction de survie $\mathrm{r}(x) = 1 - \mathrm{F}(x)$ de X.

c) Calculer l'espérance de X et sa variance.

La loi de X est appelée loi exponentielle de paramètre λ.

d) On considère la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \exp(\mathrm{X})$. Déterminer sa fonction de survie, sa densité, son espérance.

11. Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle réel $[0,1]$. Déterminer la loi de X^2.

NOTE:
Une suite infinie d'expériences à deux résultats possibles A et B de probabilités respectives p et q=1-p peut être modélisée par le triplet $(\Omega, \mathbf{U}, \mathrm{P})$ où:
Ω *est l ensemble des suites* $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_i, ..)$ où $\omega_i \in \{A, B\}$,
$\mathbf{U}$ *est la plus petite tribu contenant les sous ensembles de* Ω
$C_{i_1,\ldots,i_n}(a_1,\ldots,a_n) = \{\omega : \omega_{i_1} = a_1, \ldots, \omega_{i_n} = a_n\}$ où $a_i \in \{A, B\}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_n$, $n \ge 1$,
P *la probabilité telle que* $\mathrm{P}(C_{i_1,\ldots,i_n}(a_1,\ldots,a_n)) = p^{\mathrm{card}(\{i : a_i = A\})} q^{\mathrm{card}(\{i : a_i = B\})}$.