1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ.

a) Déterminer la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire $Z = \max(X,Y)$.

b) Déterminer la fonction de survie de la variable aléatoire $T = \min(X,Y)$. Reconnaître la loi de T.

2. On choisit au hasard un point à coordonnées entières dans le disque de rayon 2 centré à l'origine O d'un plan muni d' un repère orthonormé. On note X et Y les coordonnées de ce point.

a) Déterminer la loi du couple $Z = (X,Y)$, ainsi que les lois de X et Y.

b) Calculer les espérances $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

c) Soient X_1 de même loi que X et Y_1 de même loi que Y. On suppose X_1 et Y_1 indépendantes. Déterminer la loi du couple $Z_1 = (X_1, Y_1)$.

3. Une boîte contient n boules numérotées de 1 à n ; on effectue deux tirages sans remise. On note X_i, pour $i = 1$ ou 2, la variable aléatoire indicatrice de l'événement A_i : « la $i^{ème}$ boule tirée porte le numéro i ».

a) Déterminer la loi de X_1.

b) Calculer $P(X_2 = 1)$; en déduire que X_1 et X_2 suivent la même loi.

c) Calculer $P(X_1 = 1, X_2 = 1)$; en déduire la loi du couple (X_1, X_2).

d) Déterminer la loi du produit $X_1 X_2$ ainsi que celle de la somme $X_1 + X_2$.

4. Déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales de paramètres (n,p) et (m,p).

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = c \exp(-(x+y)) \mathbf{1}_{\{(u,v):0 \le u \le v\}}(x,y)$.

a) Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité d'un couple (X,Y) de variables aléatoires.

b) Déterminer la densité de X et celle de Y.

c) X et Y sont-elles indépendantes ?

6. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de même paramètre λ.
Déterminer la fonction de répartition de la somme $X_1 + X_2$, puis sa densité.

7. On choisit au hasard un point (X,Y) dans le triangle de $\mathbf{R}^2$ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.

a) Déterminer les lois de X, Y, $X+Y$.

b) Vérifier que $(X+Y)^2$ est uniformément répartie dans $[0,1]$. Calculer la variance de $X+Y$.