1. Soit Ω l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, 5\}$ avec probabilité uniforme et X la variable aléatoire $\Omega \to \mathbb{R}$ qui associe à une permutation le nombre de ses points fixes. Calculer l'espérance de X.

2. On choisit un point (X, Y) au hasard sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Quelle est la loi de (X, Y) (quelle est sa densité si (X, Y) admet une densité) ? Quelle est l'espérance de X ?

3. On choisit un point (X, Y) au hasard dans le disque $\mathrm{D}((0, 0), 1)$. Quelle est la loi de (X, Y) ? Quelle est la loi de X ? Même question en remplaçant $\mathrm{D}((0, 0), 1)$ par $\mathrm{D}((1, 1), 1)$.

4. Soient X et Y deux variables indépendantes de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. Quelle est la loi de $|X - Y|$?

5. Une urne contient N bulletins dont pN blancs et $(1 - p)N$ noirs. On en tire n au hasard ($n \leq N$). Soit X_n le nombre de bulletins blancs tirés. Donner l'espérance et la variance de X_n. L'entier n étant fixé, vers quelle loi converge la loi de X_n lorsque N tend vers l'infini ?

Montrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, $\mathrm{P}(|\frac{X_n}{n} - p| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$. En déduire le nombre n de bulletins qu'il suffit de tirer pour estimer p à 0.1 près avec un risque de se tromper inférieur à 5%.

6. (D'après le partiel d'avril 2002.) Des élèves ont à répondre à une question à choix multiples où n est le nombre de réponses possibles. On considère qu'un élève à une probabilité p de connaître la bonne réponse et qu'il répond au hasard s'il ne connaît pas la réponse. Quelle est la probabilité que l'élève connaisse effectivement la bonne réponse s'il a répondu correctement sur sa copie ?

Lors d'un examen, un grand nombre N d'élèves doivent répondre à cette question. Que proposez vous pour déterminer expérimentalement p ?

On suppose $p = \frac{1}{2}$. Vers quoi tend la probabilité que la proportion d'élèves ayant répondu correctement à la question sans connaître la réponse soit supérieur à 30% lorsque N tend vers l'infini (donner une valeur numérique) ?

(On introduira la variable de Bernouilli associée à chaque élève valant 1 si l'élève répond correctement sans connaître la réponse et 0 sinon.)