1. Identifier les événements en jeu : Ω = population, P = proba uniforme sur Ω (c'est sous-entendu dans ce type d'énoncé) donc $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

M = "être malade" = $\{\omega \in \Omega, \omega \text{ est malade}\}$

V = "être vacciné" $\quad V^c$ désigne le complémentaire de V dans Ω

On donne $P(M) = \frac{2}{100}$, $P(V) = \frac{80}{100}$, $P(M \mid V^c) = \frac{9}{100}$

M est indépendant de V ssi $P(M \cap V) = P(M)\,P(V)$

On a $M = (M \cap V) \cup (M \cap V^c)$ et la réunion est disjointe donc $P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap V^c)$

$P(M \cap V^c) = P(M \mid V^c)\,P(V^c)$

$P(V^c) = 1 - P(V)$

...

2. A nouveau on note M : "être malade". $P(M) = 10^{-5}$

T : "test positif". $P(T \mid M) = \frac{95}{100}$, $P(T \mid M^c) = 5 \cdot 10^{-3}$

On demande $P(M \mid T)$

On a $P(M \mid T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$

$T = (T \cap M) \cup (T \cap M^c)$ réunion disjointe donc $P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap M^c) = P(T \mid M)\,P(M) + P(T \mid M^c)\,P(M^c)$

$P(M \cap T) = P(T \mid M)\,P(M)$

3. a. X_1 est à valeurs dans $\{0,1\}$ $\quad P(X_1 = 1) = E(X_1) = p$. Idem pour X_2

$X_1 + X_2$ est donc à valeurs dans $\{0,1,2\}$ Pour déterminer $P(X_1 + X_2 = k)$, $k \in \{0,1,2\}$, on identifie les événements $X_1 + X_2 = k$

par exemple $X_1 + X_2 = 1 \iff (X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0) \text{ ou } (X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 1)$

donc $P(X_1 + X_2 = 1) = P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0) + P(X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 1)$ (Pourquoi ?)

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, $P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0) = P(X_1 = 1)\,P(X_2 = 0) = p\,(1-q)$

...

Si $p = q$ comparer la loi de $X_1 + X_2$ avec une loi binomiale

$E(X_1 + X_2)$: on peut utiliser la loi de $X_1 + X_2$ et la définition de l'espérance : $E(X_1 + X_2) = 0\,P(X_1 + X_2 = 0) + 1\,P(X_1 + X_2 = 1) + 2\,P(X_1 + X_2 = 2)$

Plus efficacement on peut utiliser la linéarité de l'espérance : $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$

$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = E((X_1 + X_2)^2) - (E(X_1 + X_2))^2$

$E((X_1 + X_2)^2) = E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) = E(X_1^2) + 2\,E(X_1X_2) + E(X_2^2)$

On a $E(X_1X_2) = E(X_1)\,E(X_2)$ car X_1 est indépendante de X_2

On observe $X_1^2 = X_1$ ie $\forall \omega \in \Omega \quad X_1(\omega)^2 = X_1(\omega)$ car X_1 est à valeurs dans $\{0,1\}$. Idem pour X_2

Rq X_1 et X_2 sont indépendantes $\Rightarrow \mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$ (Théorème de Pythagore)

3b. On calcule $P(X_1+X_2=k \text{ et } X_3=\ell) = P\left(\bigcup_{i+j=k}(X_1=i \text{ et } X_2=j) \text{ et } X_3=\ell\right)$

$$= P\left(\bigcup_{i+j=k}(X_1=i \text{ et } X_2=j \text{ et } X_3=\ell)\right)$$

$$= \sum_{i+j=k} P(X_1=i \text{ et } X_2=j \text{ et } X_3=\ell) \quad \text{car les évènements sont disjoints}$$

$$= \sum_{i+j=k} P(X_1=i)\,P(X_2=j)\,P(X_3=\ell) \quad \text{car } X_1, X_2, X_3 \text{ sont indépendantes}$$

$$= \sum_{i+j=k} P(X_1=i \text{ et } X_2=j)\,P(X_3=\ell) \quad \text{car } X_1, X_2 \text{ sont indépendantes}$$

$$= P\left(\bigcup_{i+j=k}(X_1=i \text{ et } X_2=j)\right) P(X_3=\ell)$$

$$= P(X_1+X_2=k)\,P(X_3=\ell)$$

3c. On observe $X_1+X_2=0 \Rightarrow X_3=1$

$X_1+X_2=1 \iff X_3=0$

L'évènement $X_1+X_2=0$ n'est ni l'évènement sûr ni l'évènement impossible si $(p,q)\neq(0,0)$ et $p\neq 1$ et $q\neq 1$, auquel cas l'évènement $X_3=0$ n'est également ni sûr ni impossible

Comparer alors $P(X_1+X_2=0 \text{ et } X_3=0)$ $(=0\,!)$ avec $P(X_1+X_2=0)\,P(X_3=0)$ (>0)

Avec 3b) on en déduit que X_1, X_2, X_3 ne sont pas indépendantes. On aurait aussi pu comparer $P(X_1=0 \text{ et } X_2=0 \text{ et } X_3=0)$ avec $P(X_1=0)P(X_2=0)P(X_3=0)$

Exceptions : Une va constante est indépendante de tout le monde. Si par exemple $p=0$ alors $X_1=0$ presque sûrement donc $X_3=1-X_2$

Si de plus $q=0$ ou $q=1$ alors X_2 est constante (p.s.) donc X_1, X_2, X_3 sont indépendantes.

Sinon $P(X_2=0 \text{ et } X_3=0)=0 \neq P(X_2=0)\,P(X_3=0)$ donc X_2 et X_3 ne sont pas indépendantes donc $X_1+X_2=X_2$ et X_3 non plus.

3d. $Var(X_1+X_2+X_3) = E((X_1+X_2+X_3)^2) - (E(X_1+X_2+X_3))^2$. On a $E(X_1+X_2+X_3)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)$. $E(X_3)=P(X_3=1)=P(X_1+X_2\neq 1)$

$E((X_1+X_2+X_3)^2) = E(X_1^2+X_2^2+X_3^2+2X_1X_2+2X_1X_3+2X_2X_3) = E(X_1^2)+E(X_2^2)+E(X_3^2)+2E(X_1X_2)+2E(X_1X_3)+2E(X_2X_3)$

On a déjà vu $X_i^2=X_i$ donc $E(X_i^2)=E(X_i)$

$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$ car X_1 et X_2 sont indépendantes

X_1X_3 est une va de Bernoulli $E(X_1X_3)=P(X_1X_3=1)=P(X_1=1 \text{ et } X_3=1)$ Or l'évènement $X_1=1$ et $X_3=1$ est l'évènement $X_1=1$ et $X_2=1$

donc $P(X_1=1 \text{ et } X_3=1)=P(X_1=1 \text{ et } X_2=1)=P(X_1=1)\,P(X_2=1)$ (car X_1 et X_2 sont indépendantes)

En fait on a $X_1X_3=X_1X_2$ et $X_2X_3=X_1X_2$ comme applications $\Omega\to\{0,1\}$

3e. On sait déjà que X_1 et X_2 sont indépendantes.

On calcule $P(X_1=1 \text{ et } X_3=1)=P(X_1=1 \text{ et } X_2=1)=P(X_1=1)\,P(X_2=1)=\frac{1}{4}$ qu'on compare à $P(X_1=1)\,P(X_3=1)=P(X_1=1)(1-P(X_3=0))$

$$= P(X_1=1)(1-P(X_1+X_2=1))$$

$$= p(1-2p(1-p)) = \frac{1}{4}$$

On calcule aussi $P(X_1=1 \text{ et } X_3=0)=P(X_1=1 \text{ et } X_2=0)=P(X_1=1)\,P(X_2=0)$ qu'on compare à $P(X_1=1)\,P(X_3=0)$

$P(X_1=0 \text{ et } X_3=1)=P(X_1=0 \text{ et } X_2=0)=P(X_1=0)\,P(X_2=0)$ — $P(X_1=0)\,P(X_3=1)$

$P(X_1=0 \text{ et } X_3=0)=P(X_1=0 \text{ et } X_2=1)=P(X_1=0)\,P(X_2=1)$ —

On a $Cov(X_1+X_2, X_3) = Cov(X_1,X_3)+Cov(X_2,X_3)$ par bilinéarité de la covariance

$= 0+0$ par indépendance des couples ci-dessus

Alors qu'on sait que X_1+X_2 n'est pas indépendante de X_3

4a. X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$. $P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $P(Y=k) = e^{-\mu}\dfrac{\mu^k}{k!}$

X+Y est donc à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$P(X+Y=n) = P\Big(\bigcup_{k+\ell=n}(X=k \text{ et } Y=\ell)\Big) = \sum_{k+\ell=n} P(X=k)\,P(Y=\ell) \quad \text{(réunion disjointe et indépendance)}$$

$$= e^{-\lambda}e^{-\mu}\sum_{k+\ell=n}\frac{\lambda^k\mu^\ell}{k!\,\ell!} = ?$$

4b. X de loi $\mathcal{N}(m_1,\underline{\underline{\sigma_1^2}})$ donc de densité $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$. Idem pour Y

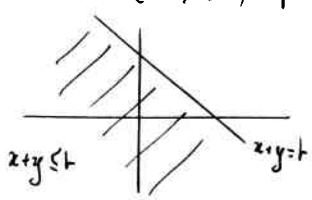
On a $P(X\leq u \text{ et } Y\leq v) = P(X\leq u)\,P(Y\leq v)$ par indépendance

$$= \left(\int_{x\in]-\infty,u]} f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{y\in]-\infty,v]} f_Y(y)\,dy\right)$$

$$= \int_{]-\infty,u]\times]-\infty,v]} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy \quad \text{par Fubini}$$

donc le couple (X,Y) admet la densité $(x,y)\mapsto f_X(x)f_Y(y)$

On calcule $P(X+Y\leq t)$ pour $t\in\mathbb{R}$. Ceci revient à intégrer la densité $(x,y)\mapsto f_X(x)f_Y(y)$ sur le domaine $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y\leq t\}$



$$P(X+Y\leq t) = \int_{x+y\leq t} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy = \int_{x\in\mathbb{R}}\int_{y\in]-\infty,t-x]} f_X(x)f_Y(y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x+y\leq t}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1}-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2}\right)dx\,dy$$

Pour simplifier les calculs, on suppose $m_1=m_2=0$. Le cas m_1 et m_2 quelconque se ramènera à ce cas particulier

On fait le changt de variable $\begin{array}{l}u=x+y\\ v=y\end{array}$ de matrice $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ On obtient $P(X+Y\leq t) = \displaystyle\int_{\substack{u\leq t\\ v\in\mathbb{R}}} f_X(u-v)f_Y(v)\,du\,dv$

$$= \int_{-\infty}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}} f_X(u-v)f_Y(v)\,dv\right)du$$

On voit ainsi que X+Y admet la densité $f_X * f_Y$ (produit de convolution)

$$u\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v)f_Y(v)\,dv$$

Pour $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma_1^2)$ et $Y\sim\mathcal{N}(0,\sigma_2^2)$ on a $f_X*f_Y(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\,2\pi}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}\right)dv$ qu'on va comparer avec

$\dfrac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{u^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)$, la densité de $\mathcal{N}(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Pour cela on écrit $-\dfrac{(u-v)^2}{2\sigma_1^2}-\dfrac{v^2}{2\sigma_2^2}$ sous la forme $-\dfrac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}+\alpha$ où α,σ,μ sont des paramètres dépendant de σ_1,σ_2 et u à déterminer

(forme réduite d'un binôme du second degré). On aura alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\,2\pi}\exp\left(-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}+\alpha\right)dv = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^\alpha}{\sigma_1\sigma_2\,2\pi}\exp\left(-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dv = \frac{e^\alpha}{\sigma_1\sigma_2\,2\pi}\,\sigma\sqrt{2\pi}$

car on sait $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dv = 1$ (somme de la densité d'une loi normale).

Après calcul on trouve $\sigma = \dfrac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$, $\mu = \dfrac{u\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$, $\alpha = \dfrac{-u^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$ donc $f_X*f_Y(u) = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sqrt{2\pi}}\exp\left(\dfrac{-u^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)$. On reconnait bien

la densité de $\mathcal{N}(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Pour m_1 et m_2 quelconques on écrit $X = m_1 + X_0$, $Y = m_2 + Y_0$ d'où $X+Y = m_1 + m_2 + X_0 + Y_0$

X_0 , resp. Y_0 , suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$, resp. $\mathcal{N}(0,\sigma_2^2)$ (cf densité de $aX+b$ dans l'exercice VI de la feuille d'exercices n°1)

donc $X_0 + Y_0$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

donc $m_1 + m_2 + X_0 + Y_0$ suit la loi $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

4c. $\phi_X(t) = E(\exp(itX))$ pour $t \in \mathbb{R}$ alors ϕ_X est une application continue $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et on a pour X et Y deux va à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \iff \phi_X = \phi_Y$$

Si $X \sim$ Poisson (λ) alors $\phi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$, $\phi_Y(t) = \exp(\mu(e^{it}-1))$
$Y \sim$ Poisson (μ)

$$\phi_{X+Y}(t) = E(\exp(itX + itY)) = E(\exp(itX)\exp(itY))$$
$$= E(\exp(itX))\,E(\exp(itY))$$ car $\exp(itX)$ et $\exp(itY)$ sont deux va indépendants car X et Y le sont
$$= \phi_X(t)\,\phi_Y(t)$$

donc $\phi_{X+Y}(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))\exp(\mu(e^{it}-1)) = \exp((\lambda+\mu)(e^{it}-1))$ et on reconnait là la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Si $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ on a $\phi_X(t) = e^{itm_1} e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}$ et $\phi_Y(t) = e^{itm_2} e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}}$ (cf feuille 1 ex VI)

donc $\phi_{X+Y}(t) \underset{\uparrow}{=} e^{itm_1} e^{itm_2} e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(m_1+m_2)} e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$ et on reconnait la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

(car X et Y sont supposées indépendants)

5. X_k de loi géométrique de paramètre q_k $\iff$ X_k à valeurs ds $\mathbb{N}$ et $P(X_k = i) = (1-q_k)\,q_k^{\,i}$

On suppose $X_1, \dots, X_n$ indépendants. On veut la loi de $\mathrm{Min}(X_1, \dots, X_n)$

Observer d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{Min}(X_1,\dots,X_n) \geq x \iff X_1 \geq x$ et $X_2 \geq x$ et ... et $X_n \geq x$

Observer ensuite que si X suit une loi géométrique de paramètre q alors $P(X \geq x) = q^{\bar{x}}$ où $\bar{x}$ est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à x. En effet $P(X \geq x) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq x}} P(X=k) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq x}} (1-q)\,q^k$

Utiliser l'indépendance des X_k et les ~~premières~~ observations ci-dessus pour montrer $P(\mathrm{Min}(X_1,\dots,X_n) \geq x) = q_1^{\bar{x}} \cdots q_n^{\bar{x}} = (q_1 \cdots q_n)^{\bar{x}}$

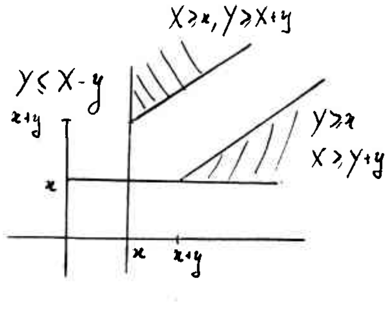
Observer enfin que deux va X et Y ont même loi ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \geq x) = P(Y \geq x)$

6. X de loi exponentielle de paramètre λ $\iff$ X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et admet la densité $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$
$= 0$ si $x < 0$

Y indépendante de X de loi exponentielle μ. $m = \mathrm{Min}(X,Y)$, $M = \mathrm{Max}(X,Y) - m$. m et M sont à valeurs dans ?

Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$ fixés on sait interpréter l'événement $m \geq x$: c'est $X \geq x$ et $Y \geq x$

$M \geq y$: c'est $|Y - X| \geq y$ soit $Y \geq X + y$ ou $Y \leq X - y$



Donc l'événement $m \geq x$ et $M \geq y$ est $(X \geq x$ et $Y \geq X+y)$ ou $(Y \geq x$ et $X \geq Y+y)$ ⇝ dessin

La loi du couple (m, M) est donnée (avec un peu de bonne volonté) par

$$P(m \geq x \text{ et } M \geq y) = \int_{u\geq x}\int_{v\geq u+y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du + \int_{v\geq x}\int_{u\geq v+y} f_{(X,Y)}(u,v)\,du\,dv$$

(5.) On a $f_{(X,Y)}(u,v) = f_X(u) f_Y(v)$ puisque X et Y sont indépendantes

$$= \lambda e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu v}$$

$$P(m \geq x \text{ et } \Pi \geq y) = \underbrace{\int_{u \geq x} \underbrace{\left(\int_{v \geq u+y} \lambda\mu\, e^{-\lambda u} e^{-\mu v}\, dv \right)}_{\lambda e^{-\lambda u} e^{-\mu(u+y)}} du}_{\frac{\lambda e^{-\mu y}}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)x}} + \underbrace{\int_{v \geq x} \left(\int_{u \geq v+y} \lambda\mu\, e^{-\lambda u} e^{-\mu v}\, du \right) dv}_{\frac{\mu e^{-\lambda y}}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)x}}$$

(on échange le rôle de λ et μ)

$$= \frac{\lambda e^{-\mu y} + \mu e^{-\lambda y}}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)x}$$

On compare avec $P(m \geq x)\, P(\Pi \geq y)$

$$P(m \geq x) = P(m \geq x \text{ et } \Pi \geq -\infty) = e^{-(\lambda+\mu)x}$$

$$P(\Pi \geq y) = P(m \geq -\infty \text{ et } \Pi \geq y) = \; ?$$

7. et 8. Voir le poly de J.F. Le Gall §9.3

http://www.dma.ens.fr/users/legall/IPPA.pdf