UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS
DEUG MIAS MP et MI 2ème année UEF6

Année Universitaire 2002-2003
Examen Partiel du 9 Avril 2003

PROBABILITES

Exercice 1. Gabriel, trois ans, a décidé d'aider son frère à ranger sa chambre. Il a avisé 20 CD hors de leur boîte. Malheureusement, il les remet au hasard dans les dîtes boîtes.
Ce rangement peut être modélisé par l'équiprobabilité sur Ω = ensemble des permutations de $\{1,...,20\}$.
On note A_i, $1 \le i \le 20$, l'événement « le ième CD qu'il range se retrouve dans « sa » boîte ».
i) Quelle est la probabilité de cet événement ?
ii) Quelle est la probabilité de $A_i \cap A_j$ pour $i \neq j$? A_i et A_j sont-ils indépendants ?
iii) Quelle est la probabilité qu'aucun des 20 CD ne se retrouve dans « sa » boîte ?

Exercice 2. Dans une population on constate de visu que la moitié des individus ont les cheveux châtains, qu'il y a autant d'individus aux cheveux blonds que d'individus aux cheveux noirs, et qu'il reste un certain pourcentage d'individus avec d'autres couleurs de cheveux.
On s'intéresse aux enfants dont les cheveux sont châtains en définissant les événements suivants :
Evénement A : l'enfant a les cheveux châtains
Evénement B : les cheveux de son père sont blonds
Evénement C : les cheveux de son père sont châtains
Evénement N : les cheveux de son père sont noirs
Evénement D : les cheveux de son père sont d'une autre couleur
La génétique nous fournit les probabilités conditionnelles suivantes :
$P(A|B) = 0.2$ $P(A|C) = 0.7$ $P(A|N) = 0.6$ $P(A|D) = 0.1$

i) Calculer les pourcentages de chacune des 4 catégories de population déterminées par leur couleur de cheveux (châtain, blond, noir, autre)
ii) Calculer les probabilités conditionnelles $P(B|A)$, $P(C|A)$, $P(N|A)$ et $P(D|A)$.

Exercice 3. Considérons une urne contenant une boule blanche et cinq boules noires numérotées. On effectue un premier tirage de 4 boules, avec remise dans l'urne. On effectue ensuite un second tirage de 4 boules et on élimine les boules sorties pour la deuxième fois. Soit Ω l'ensemble de ces couples de tirage.

1) Quelle est la probabilité pour que la boule blanche soit éliminée ?
2) Si la blanche n'est pas éliminée :
   i) Est-il possible d'éliminer 0 boule noire ? 1 boule noire ?
   ii) Calculer le nombre de couples de tirages éliminant k boules noires (k = 2, 3, 4), selon que - la boule blanche n'a pas été tirée du tout
   - la boule blanche a été tirée 1 fois.
3) On introduit la variable aléatoire X, définie sur Ω, égale à -1 si la boule blanche est éliminée, et égale au nombre de boules éliminées sinon. Donner la loi, puis l'espérance de X .

On rappelle, pour n événements A_i $(i = 1,2,..,n)$, la formule de Poincaré :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)} \quad \text{où} \quad S_k^{(n)} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le i_n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$