Proba L4, corrigé feuille 3 ex. 3, 27 nov. 01

Soient A_0 le carré $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1$ et $|y| \leq 1\}$, A_n l'image de A_0 par la rotation $r_{2\pi n\theta}$ de centre $(0,0)$ et d'angle $2\pi n\theta$, $n \in \mathbb{N}$. Décrire A^* et A_* dans les cas $\theta = \frac{1}{8}$, θ rationnel, θ irrationnel.

Rappelons $A_* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \in A_n$ sauf pour un nombre fini de $n\}$,
$A^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \in A_n$ pour une infinité de $n\}$.

On observe que A_0 est invariant par $r_{2\pi\theta}$ ($r_{2\pi\theta}(A_0) = A_0$) si et seulement si θ est un multiple entier de $\frac{1}{4}$ (on peut le montrer en observant que l'image d'un côté de A_0 doit être un côté de A_0, ce qui laisse quatre possibilités).

- Si $\theta = \frac{1}{8}$ alors $r_{4\pi\theta}$ laisse invariant A_0 (mais pas $r_{2\pi\theta}$) donc $A_{2n} = A_0$, $A_{2n+1} = A_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
$A_0 \cap A_1$ est un octagone régulier plein ; $A_0 \cup A_1$ est une "étoile à huit branches".

$M \in A_n$ sauf pour un nombre fini de n équivaut à $M \in A_{2n}$ et $M \in A_{2n+1}$ pour n assez grand donc $A_* = A_0 \cap A_1$.

M appartient à A_n pour une infinité de n si et seulement si M appartient à A_{2n} pour une infinité de n ou M appartient à A_{2n+1} pour une infinité de n donc $A^* = A_0 \cup A_1$.

- Dans le cas plus général où θ est rationnel (qu'on suppose positif ; à défaut on s'y ramène par une symétrie d'axe $y = 0$) on écrit $\theta = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers positifs premiers entre eux (si $\theta = 0$, on écrit $\theta = \frac{0}{1}$). On va déterminer la suite des $r_{2\pi n\theta}(A_0)$, n décrivant $\mathbb{N}$.

On a $r_{2\pi n\theta}(A_0) = A_0$ si et seulement si $n\theta$ est un multiple entier de $\frac{1}{4}$ donc si et seulement si q divise $4n$ (rappelons que q est premier à p). Posons $q' = \frac{q}{4}$ si 4 divise q, $q' = \frac{q}{2}$ si 2 divise q mais pas 4, enfin $q' = q$ si q est impair.
On a $r_{2\pi n\theta}(A_0) = r_{2\pi n'\theta}(A_0)$ si et seulement si q' divise $n' - n$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc périodique de période q' et prend les q' valeurs distinctes $A_0, \ldots, A_{q'-1}$.
Nous allons montrer que ces valeurs sont les q' images distinctes (mais pas disjointes !) de A_0 par les rotations d'angle un multiple entier de $\frac{2\pi}{q}$
Comme q' est encore premier à p, il existe par l'identité de Bezout $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $up - vq' = 1$. Les autres couples (u', v') vérifiant $u'p - v'q' = 1$ sont donnés par $u' = u + kq'$ et $v' = v + kp$, $k \in \mathbb{Z}$. En particulier on trouve un couple (u, v) d'entiers positifs tels que $up = 1 + vq'$. La sous-suite $(A_{nu})_{n\in\mathbb{N}}$ est également périodique de période q' et prend les q' valeurs distinctes A_0, $r_{\frac{2\pi}{q}}(A_0)$,...,$r_{\frac{2\pi(q'-1)}{q}}(A_0)$, lesquelles correspondent donc à une permutation de $A_0, \ldots, A_{q'-1}$.
(Dit autrement l'application $n \mapsto A_n$ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des parties du plan se factorise par la surjection $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}$. La multiplication par p : $\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}$ est bijective d'inverse la multiplication par u de sorte que l'ensemble $\{A_0, \ldots, A_{q'-1}\}$ s'identifie à $\{A_0, A_u, \ldots, A_{(q'-1)u}\} = \{A_0, r_{\frac{2\pi}{q}}(A_0), \ldots, r_{\frac{2\pi(q'-1)}{q}}(A_0)\}$).

Observons avant de conclure que si q est impair, les assignations $\theta = \frac{p}{q}$, $\theta = \frac{p}{2q}$ et $\theta = \frac{p}{4q}$ donnent des suites (A_n) prenant les mêmes valeurs. Celles-ci sont donc (quelque soit la parité de q) les images de A_0 par les rotations de centre $(0,0)$ et d'angle un multiple entier de $\frac{2\pi}{4q'}$.

Comme pour $\theta = \frac{1}{8}$, l'ensemble A_* est l'intersection $A_0 \cap r_{\frac{2\pi}{4q'}}(A_0) \cap \ldots \cap r_{\frac{2\pi(q'-1)}{4q'}}(A_0)$ (polygone régulier plein à $4q'$ côtés) ; A^* est la réunion $A_0 \cup r_{\frac{2\pi}{q}}(A_0) \cup \ldots \cup r_{\frac{2\pi(q'-1)}{q}}(A_0)$ ("étoile pleine à $4q'$ branches").
La frontière de A_* est circonscrite au cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 ; celle de A^* est inscrite dans le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

- cas θ irrationnel ($\theta > 0$).

On admet pour l'instant que l'ensemble $\{n\theta - m, (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On observe d'abord que chaque carré A_n contient le disque fermé $\mathrm{D}(0,1)$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1 et est inclus dans celui de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$. On a donc

$$\mathrm{D}(0,1) \subset A_* \subset A^* \subset \mathrm{D}(0,\sqrt{2}) \ .$$

On peut améliorer la dernière inclusion : Soient m et n deux entiers positifs et M et N deux sommets de A_m et A_n respectivement. Si $M = N$ alors M et $r_{2\pi(m-n)\theta}(M)$ sont des sommets d'un même carré donc $(m-n)\theta$ est un multiple entier de $\frac{1}{4}$ ce qui entraine $m = n$ puisque θ est irrationnel. On en déduit qu'un point du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ est dans A_n pour au plus une valeur de n, donc n'est pas dans A^*. On a donc $A^* \subset \mathring{\mathrm{D}}(0,\sqrt{2})$, le disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Nous allons maintenant montrer les inclusions opposées : $A_* \subset \mathrm{D}(0,1)$ et $\mathring{\mathrm{D}}(0,\sqrt{2}) \subset A^*$.

On commence par caractériser l'appartenance d'un couple (x,y) à l'image du carré A_0 par la rotation r_α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

r_α a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dans la base canonique : $r_\alpha((x,y)) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$. $(x,y) \in r_\alpha(A_0)$ équivaut à $r_{-\alpha}((x,y)) \in A_0$ donc à $(|x\cos\alpha + y\sin\alpha| \leq 1$ et $|-x\sin\alpha + y\cos\alpha| \leq 1)$.

Pour la première inclusion, soit (x,y) un point extérieur au disque $\mathrm{D}(0,1)$. On écrit $(x,y) = (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$ avec $\rho \geq 0$. L'hypothèse $\rho > 1$ garantit $(x,y) \notin r_\alpha(A_0)$: $|\rho\cos^2\alpha + \rho\sin^2\alpha| > 1$. Par continuité de cos et sin, on trouve $\delta > 0$ tel que pour tout réel α'

$$|\alpha' - \alpha| < \delta \Longrightarrow |\rho\cos\alpha\cos\alpha' + \rho\sin\alpha\sin\alpha'| > 1$$

ce qui entraine $(x,y) \notin r_{\alpha'}(A_0)$. Par densité de l'ensemble $\{n\theta - m, (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ dans $\mathbb{R}$, on trouve une infinité d'entiers positifs n tels qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $|(2\pi(n\theta - m) - \alpha| < \delta$ donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, (x,y) \notin A_n\}$ est infini, ce qui entraine $(x,y) \notin A_*$.

La seconde inclusion se montre de façon semblable (on pourrait d'ailleurs utiliser la dualité entre Limsup et Liminf) : Soit (x,y) un élément de $\mathring{\mathrm{D}}(0,\sqrt{2})$ qu'on écrit $(x,y) = (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) = r_\alpha((\rho,0))$ avec $0 \leq \rho < \sqrt{2}$; alors (x,y) est dans $r_{-\alpha+\frac{\pi}{4}}(\mathring{A}_0)$: $r_{-\alpha+\frac{\pi}{4}}((x,y)) = r_{\frac{\pi}{4}}((\rho,0)) = (\frac{\rho}{\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}})$ et $|\frac{\rho}{\sqrt{2}}| < 1$. A nouveau par continuité de cos et sin on trouve $\delta > 0$ tel que pur tout réel α' on ait

$$|\alpha' - \alpha - \frac{\pi}{4}| < \delta \Longrightarrow (x,y) \in r_{\alpha'}(\mathring{A}_0) \ .$$

Ensuite on trouve une infinité d'entiers positifs n tels que $\exists m \in \mathbb{N}, |2\pi(n\theta - m) - \alpha - \frac{\pi}{4}| < \delta$ donc tels que $(x,y) \in r_{2\pi n\theta}(A_0)$ c'est à dire $(x,y) \in A_n$. On a donc montré $(x,y) \in A^*$.

Nous terminons par la démonstration de ce que l'ensemble $\{n\theta - m, (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque θ est irrationnel.

Supposons toujours $\theta > 0$ et notons A l'ensemble $\{n\theta - m, (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$. L'ensemble des éléments strictement positifs de A est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$; on note α sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Observons d'abord que l'ensemble $A \cap \mathbb{Q}_+^\times$ est vide parce que θ est irrationnel. En particulier si α est rationnel alors tout voisinage de α contient une infinité de points de $A \cap \mathbb{R}_+^\times$.

On a $\alpha < 1$ car sinon $\alpha - 1$ est encore dans l'adhérence de $A \cap \mathbb{R}_+^\times$. De même $\alpha = 0$ car sinon il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha < 1 \leq (n+1)\alpha$; alors $0 \leq (n+1)\alpha - 1 < \alpha$ et $(n+1)\alpha - 1$ est encore dans l'adhérence de $A \cap \mathbb{R}_+^\times$. Comme 0 n'est pas dans $A \cap \mathbb{R}_+^\times$, ce qui précède montre que 0 est point d'accumulation de $A \cap \mathbb{R}_+^\times$.

Soit alors $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x \geq -m$. Il existe $(n_0, m_0) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < n_0\theta - m_0 < \epsilon$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $-m + n(n_0\theta - m_0) \leq x < -m + (n+1)(n_0\theta - m_0)$. Alors $nn_0\theta - nm_0 - m$ est dans A et on a $|nn_0\theta - nm_0 - m - x| < \epsilon$.

Complément

Soit θ un réel positif ; on note ϕ l'homomorphisme de groupes $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $(n, m) \mapsto n\theta - m$.

- Soit θ est irrationnel et alors ϕ est injectif et d'image dense dans $\mathbb{R}$.

- Soit θ s'écrit $\frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers dont le plus grand diviseur commun vaut 1 et alors ϕ a pour noyau le sous-groupe $(q, p)\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et pour image le sous-groupe discret $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$. La restriction de ϕ à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a même image.