Déroulement du premier TD de proba en MI5, 27 février 02

La séance a duré trois heures. Tous les exercices de la feuille 1 sauf le quatrième ont été traités.

Il y avait 22 étudiants, parmis eux quelques bons qui répondent juste très vite, quelques exaspérations aussi. J'ai fait une pause après 1h30. Les étudiants étaient plus essoufflés pendant la deuxième partie. Ceux qui ne suivent pas ne veulent pas me le dire.

Rappel. Ω, P probabilité sur Ω, $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. Deux cas :

- Ω est fini non vide, de cardinal noté $|\Omega|$. Pour A inclus dans Ω, $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Seul l'exo 4 n'est pas dans ce cas.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (ou plus généralement $\mathbb{R}^n$) dont on peut calculer l'aire, d'aire finie non nulle. Pour $A \subset \Omega$ dont on peut calculer l'aire, $\mathrm{P}(A) = \frac{\text{aire de } A}{\text{aire de } \Omega}$. L'exo 4 est dans ce cas.

Un étudiant me demande pourquoi je raconte cela.

Ex 1. On lance un dé. $\Omega \simeq \{1, \ldots, 6\}$. Un étudiant n'aime pas mon $\simeq$. Je remplace $\simeq$ par $=$.
$\mathrm{P}(\text{as}) = \frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(2 \text{ ou } 5) = \frac{2}{6} = \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(5)$.

Remarque. $A, B \subset \Omega$ disjoints alors $\mathrm{P}(A \sqcup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$; c'est un axiome.
Pour A et B quelconque, on a $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
On le montre en écrivant :
$A \cup B = A \backslash (A \cap B) \sqcup (A \cap B) \sqcup B \backslash (A \cap B)$ donc $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A \backslash (A \cap B)) + \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(B \backslash (A \cap B))$,
$A = A \backslash (A \cap B) \sqcup (A \cap B)$ donc $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \backslash (A \cap B)) + \mathrm{P}(A \cap B)$,
$B = B \backslash (A \cap B) \sqcup (A \cap B)$ donc $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \backslash (A \cap B)) + \mathrm{P}(A \cap B)$.

Ex 2. Deux dés. P(la somme des valeurs est paire) = ?

Artifice : on distingue les dés d_1 et d_2. Un lancer produit un couple de valeurs $(\mathrm{V}(d_1), \mathrm{V}(d_2)) \in \{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 6\}$.
On pose $\Omega = \{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 6\}$. Chaque élément de Ω a même probabilité $\frac{1}{36}$. Si A est une partie de Ω, $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{36}$.
$A = \{(x, y) \in \Omega, x + y \text{ pair}\}$. On écrit $A = \{(x, y) \in \Omega, x \text{ pair et } y \text{ pair}\} \sqcup \{(x, y) \in \Omega, x \text{ impair et } y \text{ impair}\}$.
D'où $|A| = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3$, $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$.

Certains étudiants me demandent s'il faut écrire tout cela pour répondre à l'exercice, si on ne peut pas faire plus simple.

Alternative pour Ω

$\Omega' =$ ensemble des pairs de valeurs prises par les dés. $|\Omega'| =?$ Plusieurs répondent $\frac{36}{2}$. J'entends aussi 21.

On a une application $f : \Omega \to \Omega'$, $(x, y) \mapsto \{x, y\}$.

Si $x = y$, $\{x, y\}$ n'a qu'un seul antécédent (x, x).
Si $x \neq y$, $\{x, y\}$ a exactement deux antécédents (x, y) et (y, x).
$\Omega = \sqcup_{\omega \in \Omega'} f^{-1}(\omega)$ d'où $|\Omega| = \sum_{\omega \in \Omega'} |f^{-1}(\omega)| = 6 + 2(|\Omega'| - 6)$ donc $|\Omega'| = 21$.
$\mathrm{P}(\{1, 1\}) = \frac{1}{36}$, $\mathrm{P}(\{1, 2\}) = \frac{1}{18}$: les éléments de Ω' ne sont pas équiprobables.
Ce n'est pas un bon modèle.

Deuxième alternative

$\Omega'' = \{(x \bmod 2, y \bmod 2), x, y \in \{1, \ldots, 6\}\}$, $|\Omega''| = 4$.
$A = \{((x \bmod 2, y \bmod 2) \in \Omega'', x \bmod 2 + y \bmod 2 = 0 \bmod 2\}$.
A nouveau on a une application $\Omega \to \Omega''$. Elle permet de montrer que tous les éléments de Ω'' ont même probabilité.
...

Ex 3. On forme une main de poker : 5 cartes sans répétition parmis $52 = 4 \cdot 13$. (4 couleurs, 13 hauteurs.) P(pas de coeur dans cette main) =?

On me donne la réponse $\frac{C_{39}^5}{C_{52}^5}$.

Remarque. E ensemble fini de cardinal n, $\Omega_k = \{$parties à k éléments de $E\}$, alors $|\Omega_k| = C_n^k$.
On peut prendre cette égalité comme définition de C_n^k et alors un calcul donne $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$. (Les étudiants me le disent.)
On a $\mathcal{P}(E) = \sqcup_{0\leq k\leq n}\Omega_k$ ce qui donne $2^n = \sum_{0\leq k\leq n} C_n^k$
On retrouve cette égalité avec la formule du binome : $(1+x)^k = \sum_{0\leq k\leq n} C_n^k\, x^k$.
$\Omega_k \to \Omega_{n-k}$, $A \mapsto E\backslash A$ est une bijection d'inverse $\Omega_{n-k} \to \Omega_k$, $A \mapsto E\backslash A$. On obtient $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Ex 5. Nombre de façons de répartir 40 étudiants en deux groupes A et B de 20 étudiants.
E ensemble de cardinal 40, $\Omega = \{(A,B), E = A\cup B, |A| = |B| = 20\}$.

Les étudiants me répondent C_{40}^{20} : les couples (A,B) sont en bijection avec les parties A de 20 éléments de E.

Maintenant on ne distingue plus les groupes. $\Omega' = \{\{A,B\}, E = A\cup B, |A| = |B| = 20\}$.
On a à nouveau une application $\Omega \to \Omega'$ surjective. Chaque élément de Ω' a deux antécédents donc $|\Omega'| = \frac{1}{2}C_{40}^{20}$.

Je leur fais remarquer qu'il n'est pas évident que 2 divise C_{40}^{20} : 2 ne divise pas C_{40}^{8}. Un étudiant fait remarquer les égalités $C_{40}^{20} = C_{39}^{20} + C_{39}^{19}$ et $C_{39}^{20} = C_{39}^{19}$.

Pause de 10 mn. Je songe à déjà commencer la deuxième feuille pendant cette séance.

Variation. $\Omega'' = \{\{A,B\}, E = A\cup B, |A| = 19, |B| = 21\}$ alors $|\Omega''| = C_{40}^{19}$, il n'y a pas de facteur $\frac{1}{2}$.

Ex 6. P(au moins une paire dans une main de poker) =?

On me propose $C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{50}^3$ puis $1 - $P(aucune paire).

L'évènement "aucune paire" coïncide avec "cinq hauteurs distinctes".
$H = \{1,\dots,13\}$, $C = \{1,\dots,4\}$. L'ensemble des cartes est en bijection avec $H\times C$.
On choisit les cinq hauteurs puis une carte parmis quatre pour chaque hauteur. On obtient P(aucune paire) = $\frac{C_{13}^5\cdot 4^5}{C_{52}^5}$.

Variation. P(exactement une paire) =?
Réponse : $\frac{C_{13}^1\cdot C_4^2\cdot C_{12}^3\cdot 4^3}{C_{52}^5}$
Preuve formelle :
Soient Ω l'ensemble des mains, A le sous ensemble des mains contenant exactement une paire, $H = \{1,\dots,13\}$, $\mathcal{P}_k(H)$ l'ensemble des parties à k éléments de H.

On a une application $h_1 : A \to H$, $\omega \mapsto$ la hauteur de l'unique paire,
$h : A \to \mathcal{P}_4(H)$, $\omega \mapsto$ l'ensemble des hauteurs des éléments de ω,
enfin une application $A \to H\times\mathcal{P}_3(H)$, $\omega \mapsto (h_1(\omega), h(\omega)\backslash\{h_1(\omega)\})$.

$|H\times\mathcal{P}_3(H)| = 13\times C_{13}^3$ mais la dernière application n'est pas surjective.
Un élément $(h_1, \{h_2,h_3,h_4\})$ est dans l'image si et seulement si $h_1 \notin \{h_2,h_3,h_4\}$ donc le cardinal de l'image est $13\cdot C_{12}^3$.
Un élément $(h_1, \{h_2,h_3,h_4\})$ dans l'image a exactement $C_4^2\cdot 4^3$ antécédents.
On obtient $|A| = 13\cdot C_{12}^3\cdot C_4^2\cdot 4^3$.

Ex 7. E ensemble fini de cardinal 30, a,b,c trois éléments de E distincts et fixés. On partitionne E en trois groupes de 10. P(a,b,c sont dans le même groupe) =?

Première réponse P(une partie de E de cardinal 10 contient a,b,c) = $\frac{C_{27}^7}{C_{30}^{10}}$.

Est-ce la réponse cherchée ? Si oui, pourquoi ?

Il est difficile de motiver les étudiants à fournir une preuve une fois le résultat obtenu.

On modélise $\Omega = \{(A, B, C), E = A \cup B \cup C, |A| = |B| = |C| = 10\}$, alors $|\Omega| = \mathrm{C}_{30}^{10} \cdot \mathrm{C}_{20}^{10} \cdot \mathrm{C}_{10}^{10}$.

$\Omega_1 = \{(A, B, C) \in \Omega, a, b, c \in A\}$, $|\Omega_1| = \mathrm{C}_{27}^{7} \cdot \mathrm{C}_{20}^{10}$.

$\Omega_2 = \{(A, B, C) \in \Omega, a, b, c \in A$ ou $a, b, c \in B$ ou $a, b, c \in C\}$, $|\Omega_2| = 3 \cdot |\Omega_1|$.

Donc $\mathrm{P}(a, b, c$ sont dans le même groupe$) = \frac{3\mathrm{C}_{27}^{7}}{\mathrm{C}_{30}^{10}}$.

C'est une bonne motivation : on a obtenu un résultat différent du premier intuitionné.

$\mathrm{P}(a, b, c$ sont dans trois groupes distincts$) = ?$

Même Ω

$\Omega_1 = \{(A, B, C) \in \Omega, a \in A$ et $b \in B$ et $c \in C\}$. Alors $|\Omega_1| = \mathrm{C}_{27}^{9}\mathrm{C}_{18}^{9}$.

$\Omega_2 = \{(A, B, C) \in \Omega, \tau(a) \in A$ et $\tau(b) \in B$ et $\tau(c) \in C$ pour une permutation τ de $\{a, b, c\}\}$.

Il y a $3 \cdot 2$ permutations de $\{a, b, c\}$ donc $|\Omega_2| = 6 \cdot |\Omega_1|$.

La probabilité cherchée est $\frac{6\mathrm{C}_{27}^{9}\mathrm{C}_{18}^{9}}{\mathrm{C}_{30}^{10}\mathrm{C}_{20}^{10}}$.

François-Xavier Dehon, Université de Nice Sophia-Antipolis, Laboratoire J.A. Dieudonné
dehon@math.unice.fr