Matrices équivalentes, matrices semblables 10 oct 05

1) Matrices équivalentes

A anneau commutatif unitaire, $M_{n,p}(A)$ anneau des matrices à n lignes et p colonnes à coef. ds A, $Gl_n(A)$ groupe des elts inversible de $M_n(A)$ pour la multiplication.

Def $M, N \in M_{n,p}(A)$ sont équivalentes s'il existe $P \in Gl_n(A)$ et $Q \in Gl_p(A)$ tq $N = PMQ$

C'est une relation d'équivalence

Interprétation en terme de matrice d'une application linéaire d'un esp. vect de dim p ds un esp. vect. de dim q relativt à des bases

Ex La classe de 0 est $\{0\}$, celle d'un élt de $Gl_n(A)$ est $Gl_n(A)$

Thm Soit A un corps (commutatif). Deux matrices de $M_{n,p}(A)$ sont équivalentes ssi elles ont m̂ rang.

Précisement tout matrice est équivalente à une matrice $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Algorithme du calcul du rang
- rg M = rg d'une matrice carré extraite inversible dont toute les bordantes sont non inversibles
  $\rightsquigarrow$ utilisation du déterminant
- opération sur les lignes et les colonnes :

Soit $\alpha \in A$, $M = (L_i)_{1 \leq i \leq n} \in M_{n,p}(A)$, $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$

$(L_i) \mapsto \begin{array}{c} \\ j_0 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \vdots \\ L_{j_0} + \alpha L_{i_0} \\ \vdots \end{pmatrix}$ est la multiplication de M à gauche par $\begin{array}{c|c} & i_0 \\ \hline & \\ j_0 & \begin{pmatrix} 1 & & \\ \alpha & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in Gl_n(A)$

$(L_i) \mapsto \begin{array}{c} i_0 \\ j_0 \end{array}\begin{pmatrix} \vdots \\ L_{j_0} \\ \vdots \\ L_{i_0} \\ \vdots \end{pmatrix}$ est la multiplication à gauche par $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i_0 & j_0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i_0 \\ j_0 \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in Gl_n(A)$

$(L_i) \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha L_{i_0} \\ \vdots \end{pmatrix}$ est la multiplication à gauche par $i_0\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in Gl_n(A)$ si α est inversible

$\rightsquigarrow$ algo : Enoncés analogues sur les colonnes par transposition

$\rightsquigarrow$ algorithme du pivot : En $O(n^3)$ opérations on transforme M ~~dt~~ en une matrice $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

A anneau euclidien. Les algorithmes du pivot et d'Euclide montrent qu'une matrice M est équivalente à une matrice $\begin{pmatrix} d & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & M' \\ 0 & \end{pmatrix}$ avec $d \mid M'$. Ceci se généralise au cas A principal

Thm Soit A un anneau principal. Toute matrice de $M_{n,p}(A)$ est équivalente à une matrice $\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ avec $d_1 \mid \dots \mid d_r$

De plus $d_1 \dots d_k = \text{pgcd}$ (~~coef~~ des mineurs d'ordre k)

Applications
- Résolutions de système d'équations linéaires, calcul de l'inverse d'une matrice
- ~~Prop~~ Classification des groupes abéliens de type fini : tout tel groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$ avec $d_1 \mid \dots \mid d_r$

2) Matrices semblables

Def $M, N \in M_n(A)$ sont semblables si $\exists P \in GL_n(A)$, $N = PMP^{-1}$

Interprétation en terme de matrice d'un ~~ap~~ endomorphisme dans une même base

$M \in GL_n(A)$ ⇝ relation de conjugaison

Ex la classe de αI_n est $\{\alpha I_n\}$

Théorie classique de la réduction d'un endomorphisme (A = corps commutatif)

$\chi_M := \det(XI_n - M) \in A[X]$ (polynôme caractéristique) est un invariant de similitude

~~Lem~~ Prop M est semblable à une matrice triangulaire $\Leftrightarrow$ χ_M est scindé

Prop Si M est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ alors $\chi_M = \chi_{M_1}\chi_{M_2}$.

Réciproquement si $\chi_M = PQ$ avec P premier à Q alors M est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ avec $\chi_{M_1} = P$ et $\chi_{M_2} = Q$

Ex Si χ_M est scindé à racines simples alors M est diagonalisable

Polynôme minimal : m_M = générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de M

Prop M est semblable à une matrice diagonale $\Leftrightarrow$ m_M est scindé à racines simples

Ex Soit G un ss groupe commutatif fini de $GL_n(\mathbb{C})$, alors G est conjugué à un ss groupe du groupe des matrices diagonales inversibles.

Cas particuliers : réduction des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$, orthogonales, hermitiennes, normales

Prop Soient $M, N \in M_n(A)$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique, alors M et N sont semblables $\Leftrightarrow$ $\chi_M = \chi_N$

Rq $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ On a $\chi_M = \chi_N$ mais M n'est pas semblable à N

Rq réduction de Jordan

~~Prop~~

Dépendance en A Ex : Prop deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables ds $M_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$

Applications : résolution des eq diff. linéaires à coef constants

~~3)~~

3) Lien entre les deux notions

M, N semblables $\Rightarrow$ M, N équivalentes

Réciproquement $M \in M_n(A)$, u l'endomorphisme de A^n associé. La donnée de u équivaut à celle d'une structure de $A[X]$-module sur A^n ⇝ présentation

$$\begin{tikzcd} (A[X])^n \arrow[r] & (A[X])^n \arrow[r] & A^n \end{tikzcd}$$

$$\uparrow$$

de matrice $XI_n - M$

Prop $M, N \in M_n(A)$ sont semblables $\Leftrightarrow$ les structures de $A[X]$-module sur A^n sont isomorphes

$\Leftrightarrow$ les matrices $XI_n - M$ et $XI_n - N$ sont équivalentes ds $M_n(A[X])$

Si A est un corps, $A[X]$ est principal. On peut appliquer les résultats du 1)