Préparation à l'agrégation TD Algèbre linéaire du premier cycle 26 sept. 2005

1. Soient E un esp. vect, $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vect. de E tq $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Montrer que pour tout esp. vect. F l'ensemble $L(E,F)$ est en bijection naturelle avec $L(E_1,F) \times \cdots \times L(E_n,F)$. Que se passe-t-il si on suppose seulement $E = E_1 + \cdots + E_n$? si on suppose seulement les E_i en somme directe ?

2. Soient E un esp. vect. et $E_1, \ldots, E_n$ des sev de E. Montrer qu'on a $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ ssi $\exists\, p_1, \ldots, p_n \in L(E)$ vérifiant
$\forall i\ p_i^2 = p_i$, $\forall i \neq j\ p_i p_j = 0$, $p_1 + \cdots + p_n = id_E$, $\forall i\ \mathrm{Im}\, p_i = E_i$

3 Soient E un esp. vect. et F un sev de E. Montrer que F admet un supplémentaire dans E. Montrer que $\exists p \in L(E)$, $p^2 = p$ et $\mathrm{Im}\, p = F$. ~~Q~~ A quoi peut on identifier l'ensemble $\{p \in L(E),\ p^2 = p \text{ et } \mathrm{Im}\, p = F\}$?

4 Soient E un esp. vect. et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille génératrice de E. Montrer que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. En déduire que toutes les bases d'un esp. vect. admettant une famille génératrice finie ont même cardinal.

5 Soient E un esp. vect et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de E. Montrer qu'on peut compléter (e_i) en une base de E

6 E, F esp. vect, $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base de E. Montrer que l'application $L(E,F) \to F^n$, $u \mapsto (u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une bijection. Quelle est la dimension de $L(E,F)$? Que se passe-t-il si (e_i) est seulement une famille génératrice de E ? une famille libre de E ?

7 Soient E, F, G des esp. vect., $v_1, \ldots, v_n \in L(E,F)$. A quelle condition une application linéaire $f\ E \to G$ s'écrit-elle $w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n$ pour des éléments w_i de $L(F,G)$? A quelle condition une appl. linéaire $g : G \to F$ s'écrit-elle $v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$ pour des $w_i \in L(G,E)$?

8 Soit $u \in L(E)$ Montrer que les suites $(\mathrm{Ker}(u^n))_n$ et $(\mathrm{Im}(u^n))_n$ sont stationnaires à partir d'un certain rang.

9 Soit E un esp. vect de dim finie, F un sev de E. Montrer qu'il existe des formes linéaires $f_1, \ldots, f_p$ tq $F = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\, f_i$. Quel est le p minimal ?

10 E de dim finie Montrer que l'application $E \to E^{**}$, $x \mapsto (\tilde{x} : E^* \to k,\ f \mapsto f(x))$ est un isomorphisme. Que se passe-t-il si E n'est pas de dimension finie ?

11 E de dim finie, F sev de E. On note $F^\perp = \{f \in E^*,\ f|_F = 0\}$ Montrer qu'on a $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$

12 Quel est le centre de $M_n(k)$? Montrer que deux matrices de $M_{n,m}(k)$ sont équivalentes ssi elles ont même rang. Montrer que le rang d'une matrice de $M_{n,m}(k)$ est égal à la taille maximale d'une matrice carrée extraite inversible.

13 Soit $f \in M_n(k)^*$ Montrer $\exists !\, A \in M_n(k)$, $\forall M \in M_n(k)$ $f(M) = \mathrm{tr}(AM)$. Quels sont les $f \in M_n(k)^*$ vérifiant $\forall M, N \in M_n(k)$, $f(MN) = f(NM)$?

14 Soient E un esp vect et $u \in L(E)$ Montrer que les ss esp. propres pour u sont en somme directe.

15 Soit E esp vect. de dim n. Montrer que l'esp. vect. des formes n-linéaires alternées sur E^n est de dim 1.

16 Soit $A \in M_{n,p}(k)$ Montrer qu'on a $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}({}^tA)$