Préparation à l'agrégation - TD à l'écrit et à l'oral   Matrices équivalentes . matrices semblables - 17 oct 2005
F.X Dehon, Université de Nice

1) matrices ds $M_2(\mathbb{Z})$ à équivalence près

a) Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$. Mq $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge d = c \wedge d = 1$. La réciproque est elle vraie ?

On suppose $a \wedge b = 1$. Trouver les couples (c,d) tq $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$. Comment deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c' & d' \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ sont elles reliées ?

b) Soit $P \in GL_2(\mathbb{Z})$. Mq $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2$ $\operatorname{pgcd}\left(P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \operatorname{pgcd}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\operatorname{pgcd}\left((x\ y)P\right) = \operatorname{pgcd}(x,y)$

c) Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ avec $(a,c) \neq (0,0)$. Trouver les $P \in GL_2(\mathbb{Z})$ tq $P\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \wedge c & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ pour des entiers b', d'. Mq pour un tel P $b' \wedge d' = b \wedge d$

Si $(a,b) \neq (0,0)$ trouver les $Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ tq $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} a \wedge b & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Mq pour un tel Q $c' \wedge d' = c \wedge d$

d) On considère l'algorithme suivant

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0 \longmapsto \begin{pmatrix} a \wedge b & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix}$ par multiplication à droite par un elt $Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ avec $|Q_{2,1}|$ minimal

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0 \longmapsto \begin{pmatrix} a \wedge c & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ par mult. à gauche par un elt $P \in GL_2(\mathbb{Z})$ avec $|P_{1,2}|$ minimal

et on boucle.

Montrer qu'en un nombre fini d'étapes on atteint une matrice diagonale. Le nombre d'étapes peut il être aussi grand qu'on veut ?

e) On sait que la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est équivalente ds $M_2(\mathbb{Z})$ à une matrice $\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ avec $d_1 \mid d_2$. Comment s'expriment d_1 et d_2 en fonction de a et d ?

Expliciter $P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ tq $P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$

Cas particulier : $a \wedge d = 1$. On considère l'application $\mathbb{Z}$-linéaire $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ dans la base canonique $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{Z}^2$. Mq le quotient de $\mathbb{Z}^2$ par l'image de cette application s'identifie à $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Mq la matrice P permet d'expliciter un isomorphisme de groupe abélien $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/ad\mathbb{Z}$ (lemme chinois)

(Indication : considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "Q^{-1}"'] & \mathbb{Z}^2 \arrow[d, "P"] \\ \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ad \end{pmatrix}"] & \mathbb{Z}^2 \end{tikzcd}$$

où les applications $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ sont celles de matrice ds la base canonique indiquée)

2) Exercices à l'oral :

- Soient $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$. A t-on $\operatorname{pgcd}\{\text{coef. de } AB\} = \operatorname{pgcd}\{\text{coef. de } A\} \operatorname{pgcd}\{\text{coef de } B\}$?
  Mq si $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ alors $\operatorname{pgcd}\{\text{coef de } AB\} = \operatorname{pgcd}\{\text{coef de } B\}$
- Soient $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{Z})$. On suppose A équivalente à B et C équivalente à D. A t-on AC équivalente à BD ?
- On sait que la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ est équivalente à une matrice $\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ avec $d_1 \mid d_2$. Que valent d_1 et d_2 ?
  Trouver $P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ tq $P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$.
- Trouver $P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ tq $P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

3) Application à la réduction des matrices à coef. ds un corps k

a) Trouver par la théorie classique une matrice $G \in GL_2(k)$ tq $G\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} G^{-1}$ soit diagonale.

b) Trouver par la méthode du 1) deux matrices $P, Q \in GL_2(k[X])$ tq $P\begin{pmatrix} 1-X & 4 \\ 3 & 2-X \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (X-2)(X-5) \end{pmatrix}$ ds $M_2(k[X])$

En déduire deux matrices $P', Q' \in GL_2(k[X])$ tq $P'\begin{pmatrix} 1-X & 4 \\ 3 & 2-X \end{pmatrix} Q' = \begin{pmatrix} X-2 & 0 \\ 0 & X-5 \end{pmatrix}$

c) On considère l'application $k[X]$-linéaire $k[X]^2 \to k[X]^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1-X & 4 \\ 3 & 2-X \end{pmatrix}$ dans la base canonique $((1,0), (0,1))$ de $k[X]^2$ (comme $k[X]$-module). Mq le quotient de $k[X]^2$ par l'image de cette application s'identifie à k^2 comme k-espace vectoriel, et que les classes des éléments $(1,0)$ et $(0,1)$ de $k[X]^2$ en forme une base.

Montrer que l'homothétie de rapport X $k[X]^2 \to k[X]^2$ induit une application k-linéaire $k^2 \to k^2$ dont la matrice dans la base précédemment citée est $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

d) ~~Mq~~ On considère l'application $k[X]$-linéaire $k[X]^2 \to k[X]^2$ de matrice $\begin{pmatrix} X-2 & 0 \\ 0 & X-5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $k[X]^2$ comme $k[X]$-module. Mq le quotient de $k[X]^2$ par l'image de cette application s'identifie à $k[X]/(X-2) \times k[X]/(X-5) \simeq k \times k$ et que l'homothétie de rapport X induit sur k^2 une application k-linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de k^2

e) On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} k[X]^2 \arrow[r, "Q'^{-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1-X & 4 \\ 3 & 2-X \end{pmatrix}"'] & k[X]^2 \arrow[d, "\begin{pmatrix} X-2 & 0 \\ 0 & X-5 \end{pmatrix}"] \\ k[X]^2 \arrow[r, "P'"'] \arrow[d] & k[X]^2 \arrow[d] \\ k^2 & k^2 \end{tikzcd}$$

d'applications $k[X]$-linéaires dont les matrices dans la base canonique de $k[X]^2$ sont celles indiquées.

Mq l'application $k^2 \to k^2$ induite par P' est de matrice G dans la base canonique de k^2. Comment s'exprime G en fonction de P' et de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$?

f) Une démonstration de Cayley-Hamilton

Mq l'application $k[X]^2 \longrightarrow k[X]^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1-X & 4 \\ 3 & 2-X \end{pmatrix}$ induit l'application nulle $k^2 \to k^2$. En déduire que l'homothétie $k[X]^2 \to k[X]^2$ de rapport $\underbrace{=\det\begin{pmatrix} 1-X & 4 \\ 3 & 2-X \end{pmatrix}}_{\chi_A(X)}$ induit l'application nulle $k^2 \to k^2$ puis observer que l'application induite est ~~pas~~ de matrice $\chi_A(A)$ ds la base canonique de k^2

4) Traduction en terme de matrice de résultats sur la réduction des endomorphismes

- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer les équivalences ${}^t\bar{A}A = A\,{}^t\bar{A} \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{C}[X],\ {}^t\bar{A} = P(A) \Leftrightarrow \exists U \in U_n(\mathbb{C}),\ UAU^{-1}$ est diagonale
- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tq ${}^t\bar{A} = A$ et $\operatorname{tr} A = 0$. Mq A est unitairement semblable à une matrice avec que des zéros sur la diagonale
- Mq toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est unitairement semblable à une matrice triangulaire
- les matrices suivantes sont elles semblables à des matrices diagonales ? $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$