Préparation à l'agrégation **Exercices d'oral** **29 novembre 2004**

1. Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire. A quelle condition une application linéaire $w : E \to G$ s'écrit $v \circ u$ pour un $v \in \mathrm{L}(F, G)$?

A quelle condition une application linéaire $w : G \to F$ s'écrit $u \circ v$ pour un $v \in \mathrm{L}(G, E)$? La réponse à la première question entraîne t-elle celle de la deuxième ?

Soient $u_1, \ldots, u_k$ des applications linéaires $E \to F$. A quelle condition une application linéaire $w : E \to G$ s'écrit $v_1 \circ u_1 + \cdots + v_k \circ u_k$ pour des $v_i \in \mathrm{L}(F, G)$? Appliquer ce résultat à un endomorphisme $w \in \mathrm{L}(E)$ et à des formes linéaires $f_1, \ldots, f_k$ sur E.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathrm{L}(E)$. Quel est le rang de l'application $\mathrm{L}(E) \to \mathrm{L}(E)$, $v \mapsto v \circ u$? Même question en remplaçant $v \circ u$ par $u \circ v$.

3. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Si u est diagonalisable, l'endomorphisme $v \mapsto v \circ u$ l'est il également ? Que dire de la réciproque ? Que dire si on remplace $v \circ u$ par $u \circ v$?

Quel est le polynôme caractéristique de $v \mapsto v \circ u$?

4. [Leichnam tome 1] Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $|a_i i| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

5. Soient E un ev de dim finie, $f, g \in \mathrm{L}(E)$ vérifiant $f + g$ est inversible et $fg = 0$. Montrer alors l'égalité $\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$. De tels endomorphismes f, g existent-ils ?

6. Soient E un espace vectoriel de dim. finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

7. Soit A une matrice carré. On note $c_{i,j}$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne j. Calculer le rang de la matrice $(c_{i,j})$ (qu'on appelle comatrice ou matrice des cofacteurs) en fonction du rang de A.

8. Soit E un espace vect. de dim. finie. Montrer que toute forme linéaire sur $\mathrm{L}(E)$ est de la forme $v \mapsto \mathrm{Tr}(u \circ v)$ pour un $u \in \mathrm{L}(E)$. Quelles sont les formes linéaires f vérifiant $f(u \circ u') = f(u' \circ u)$?

9. Soient E un ev de dim n et u un endomorphisme de E vérifiant $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u^2) = \ldots = \mathrm{Tr}(u^n)$. Montrer que $u^n = 0$.

10. Soit $k = \mathbb{Q}$. Quelles sont les matrices de $\mathrm{M}_2(k)$ commutant avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$? Que se passe t-il si $k = \mathbb{F}_2$?

11. Quels sont les sous-espaces stables de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?