Anneaux factoriels et anneaux de polynômes. D'après [D. Perrin, Cours d'algèbre, Chap II]. Un anneau (commutatif unitaire) A est factoriel s'il existe une partie $\mathcal{P}$ de A telle que tout élément non nul de A s'écrit de façon unique comme le produit d'éléments de $\mathcal{P}$ et d'une unité (un élément inversible) de A. La partie $\mathcal{P}$ s'appelle alors un système de représentants des éléments irréductibles de A. Si A est factoriel, A est intègre.

Dans ce qui suit A désigne un anneau factoriel, $\mathcal{P}$ un sytème de représentants d'éléments irréductibles de A, K le corps de fraction de A.

1. Un polynôme (non nul) de $A[X]$ est dit primitif si le pgcd de ses coefficients est une unité. Montrer que le produit de deux polynômes primitifs de $A[X]$ est primitif. (Utiliser l'application $A[X] \to A/\pi[X]$, π décrivant les éléments de $\mathcal{P}$.)

2. Soit Q un polynôme non nul de $K[X]$. Montrer qu'il existe un unique élément $c \in A - \{0\}$ tel que $c^{-1}Q$ soit un polynôme primitif de $A[X]$ dont le coefficient dominant s'écrit comme un produit (éventuellement vide) d'éléments de $\mathcal{P}$. On note $c = c_{\mathcal{P}}(Q)$ (le contenu de Q) et $c^{-1}Q = pr_{\mathcal{P}}(Q)$.

3. Montrer que l'application $K[X] - \{0\} \to (A - \{0\}) \times (A[X] - \{0\})$, $Q \mapsto (c_{\mathcal{P}}(Q), pr_{\mathcal{P}}(Q))$ est multiplicative.

4. Montrer qu'un polynôme $Q \in A[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 est irréductible si et seulement si Q est irreductible dans $K[X]$ et si $c_{\mathcal{P}}(Q)$ est une unité de A. En déduire que $A[X]$ est factoriel. Quels sont les éléments irréductibles de $A[X]$?

5.a. Soient P et Q deux polynômes unitaires de $A[X]$ tels que P divise Q dans $K[X]$. Montrer que P divise Q dans $A[X]$. Peut-on affaiblir l'hypothèse P et Q unitaires ?

5.b. Soient P, Q deux polynômes unitaires de $K[X]$ tels que P divise Q. Montrer que si Q est dans $A[X]$ alors il en est de même pour P.

6. Critère D'Eisenstein. Soit $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$ un polynôme de $A[X]$ de degré ≥ 1 et soit π un élément irréductible de A. On suppose π ne divise pas a_n, π divise a_k pour $k < n$ et π^2 ne divise pas a_0. Montrer alors que P est irréductible dans $K[X]$. (Utiliser l'application $A[X] \to A/\pi[X]$.)

7. Exemple : Prenons $A = \mathbb{Z}$. Soient p un nombre premier et $\Phi_p(X) = \sum_{0 \leq k \leq p-1} X^k$ (polynôme cyclotomique). Montrer que $\Phi_p(X+1)$ satisfait le critère d'Eisenstein et en déduire que Φ_p est irréductible.

8. Soit k un corps (commutatif) ; on prend $A = k[X]$. Les polynômes suivants sont-ils irréductibles dans $k[X, Y]$: $Y - X^2$, $X^3 - Y^2 - X$, $X^2 + Y^2 + 1$, $X^2 + Y^2 - 1$, $X^2 - Y^2 - 1$, $Y^2 - X^3$, $XY^3 - X^2Y - Y^2 + X$?

9. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant ; montrer que P prend une infinité de valeurs. Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y] - (\mathbb{C}[X] \cup \mathbb{C}[Y])$; montrer que le nombre de zéros de P est infini.

10. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y]$ sans facteur commun. Montrer qu'il existe des polynômes $A, B \in \mathbb{C}[X, Y]$ et $D \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ tels que $D = AP + BQ$. En déduire que l'ensemble $(x, y) \in \mathbb{C}^2, P(x, y) = Q(x, y) = 0$ est fini.

11. Idéaux premiers de $k[X, Y]$. k est un corps.

11.1 Soient $A, B \in k[X, Y]$ avec $B \neq 0$. Montrer l'existence de polynômes $a \in k[X]$ et $Q, R \in k[X, Y]$ tels que $aA = BQ + R$ et $\deg_Y(R) < \deg_Y(B)$.

11.2 Soit m un idéal premier non principal de $k[X, Y]$. Montrer que m contient deux polynômes $P \in k[X]$ et $Q \in k[Y]$ irréductibles. En déduire que m est maximal et que $k[X, Y]/m$ est de dimension finie comme k-espace vectoriel. Montrer que si k est algébriquement clos alors $m = (X - a, Y - b)$ pour a, b deux éléments de k.

11.3 Quels sont les idéaux premiers de $k[X, Y]$?

12. Soit k un corps. Comment s'interprète un $k[X,Y]$-module de dimension finie comme k-espace vectoriel en termes de l'algèbre linéaire ? L'algèbre $k[X,Y]/(X^2+Y)$ est-elle de dimension finie comme k-espace vectoriel ?

F.-X. Dehon, Université de Nice Sophia-Antipolis, Laboratoire J.A. Dieudonné — `dehon@math.unice.fr`