Préparation à l'Agrégation 2006 ALGÈBRE

Développements, réflexions, exemples... sur la

$\boxed{\text{DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL}}$

- Si $P_1, \dots, P_m \in k[X]$ sont des degrés distincts, ils forment une famille libre (k = corps)

- Si $\mathbb{F}$ est un corps fini à q éléments, il est de caractéristique un entier p premier, de dimension finie d sur $\mathbb{F}_p$ et $q = p^d$.

- Si $k \subset K$ est une extension de corps et $x \in K$, on a équivalence entre
  - x est algébrique sur k
  - $k[x]$ est de dimension finie sur k
  - $k[x] = k(x)$

  Si c'est le cas $\dim_k k(x) = \deg(\operatorname{Irr}(x, k, X))$

- Si $k \subset K \subset L$ sont des extensions de corps, on a
$$[L:k] = [L:K] \cdot [K:k]$$

- Si A est une algèbre (sur le corps k) de dimension finie d, alors tout idéal premier de A est maximal et A compte au plus d tels idéaux. Si de plus A est intègre, A est un corps.

- Nombre de bases de $\mathbb{F}_p^n$? cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_p)$, de $SL_n(\mathbb{F}_p)$?
- Relation de Grassmann : $\dim F + \dim G = \dim(F \cap G) + \dim(F+G)$
  (F, G sous-espaces vectoriels de dim. finie de E)

- Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Est-il possible d'avoir $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$? Et si E est de dimension finie ?

- Base adaptée à un « drapeau »

$$0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_r = E \qquad (\dim L_i = d_i)$$

Exemple des endomorphismes nilpotents u avec

$$L_i = \ker(u^i)$$

et matrice de u dans une base adaptée.

- La famille des fractions rationnelles de la forme X^j $(j \in \mathbb{N})$ ou $\dfrac{1}{(X-z)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C})$ forme une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}(X)$.

[C'est le seul exemple non trivial que je connaisse d'un espace vectoriel naturel dont on sache exhiber explicitement une base non dénombrable]