Université de Nice
Préparation à l'Agrégation Externe de Mathématiques
Algèbre et Géométrie

Année 2005-2006

Panorama du programme des Classes Préparatoires : Algèbre

Bibliographie : Ramis-Deschamps-Odoux, Arnaudies-Lelong Ferrand-Fraysse.

Notations. Sauf mention expresse du contraire, on désigne par n un nombre entier, p un nombre premier, E un ensemble, G un groupe, A un anneau, K un corps, E un espace vectoriel sur K, P un polynôme à coefficients dans K.

1 Algèbre générale

1.1 Ensembles, applications, relations

Notions. Ensemble, appartenance, inclusion, ensemble des parties, intersection, réunion, complémentaire, produit. Application, graphe, composition, restriction, prolongement, injection, surjection, bijection, bijection réciproque, image, image réciproque. Relation d'équivalence, classe d'équivalence, ensemble quotient, projection canonique. Relation d'ordre, ordre total, ordre partiel, majorant, minorant, maximum, minimum, borne inférieure, borne supérieure. Ensemble ordonné inductif et lemme de Zorn.

Ne pas oublier. Une application entre ensembles finis de même cardinaux est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective. Comportement des cardinaux finis par les opérations sur les ensembles. Cardinaux de l'ensemble des parties, des permutations, des injections, de l'ensemble des parties de cardinal donné ; triangle de Pascal, formules sur les coefficients binômiaux et interprétations ensemblistes.

1.1.1. *(Propriété universelle de l'ensemble quotient)* Soit E et F deux ensembles et $f\colon E \to F$ une application. On définit la relation d'équivalence $\sim$ sur E par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \sim y \ \Leftrightarrow \ f(x) = f(y),$$

alors f est la composée de la projection canonique $E \to E/\sim$, de la bijection $E/\sim \to \operatorname{Im} f$ induite par f et de l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset F$. La relation d'équivalence $\sim$ définit la partition de E par les ensembles $f^{-1}(y)$, y décrivant F.

1.2 Arithmétique élémentaire

Notions. Multiple, diviseur, nombre premier, division euclidienne, pgcd, ppcm, décomposition en produits de facteurs premiers, congruence, forme irréductible d'un nombre rationnel.

1.2.1. *(Théorème de Bézout)* Soit n et m deux entiers quelconques et d leur pgcd, alors il existe deux entiers u et v tels que $un + vm = d$.

1.2.2. *(Théorème de Gauss)* Soit k, n et m trois entiers, si k divise nm et est premier avec n, alors k divise m.

1.2.3. *(Petit théorème de Fermat)* Soit p un nombre premier et n un nombre entier, alors n^p est congru à n modulo p.

Savoir faire. Algorithme de la division euclidienne, algorithme d'Euclide, lemme chinois.

1.3 Structures fondamentales

1.3.1 Groupes

Notions. Loi de composition interne, associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité. Groupe, sous-groupe, groupe quotient, produit, groupe abélien. Morphisme de groupes, noyau, isomorphisme de groupes.

Générateur, groupe monogène, groupe cyclique. Groupe de permutations, transposition, cycle, signature, groupe alterné.

Ne pas oublier. Structure et sous-groupes d'un groupe monogène, l'ordre d'un élément et la cyclicité (entre autres) sont préservés par isomorphisme.

1.3.1. *(Théorème de Lagrange)* Soit H un sous-groupe de G, alors

$$\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(H)\,\mathrm{Card}(G/H).$$

Exemples. Le groupe $\mathbb{Z}$, ses sous-groupes et groupes quotients. Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ et le groupe A^* des éléments inversibles d'un anneau quelconque A. Le groupe K^n. Les groupes linéaires : $\mathrm{GL}_n(K)$, les groupes orthogonaux et unitaires $O(n)$ et $U(n)$, les groupes des isométries des polygônes réguliers, du cube, du tétraèdre. Les morphismes de groupes signature $\mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$, exponentielle $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et déterminant $\mathrm{GL}(K) \to K^*$.

1.3.2 Actions de groupe

Notions. Action de groupes, orbite, stabilisateur ou groupe d'isotropie.

1.3.2. *(Équation aux classes)* Soit E un ensemble fini sur lequel G agit et E/G l'ensemble des orbites de E sous G,

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{\overline{x} \in E/G} \frac{\mathrm{Card}(G)}{\mathrm{Card}(G_x)},$$

où pour tout $\overline{x} \in E/G$, G_x désigne le stabilisateur dans G de n'importe quel élément x de $\overline{x}$.

Exemples. L'action d'un groupe sur lui même par translation à gauche ou à droite, par conjugaison, l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$ et sur l'anneau des polynômes à n indéterminées, l'action naturelle des groupes linéaires.

1.3.3 Anneaux

Notions. Distributivité, anneau, anneau commutatif, anneau intègre. Idéal, idéal monogène, idéal premier, idéal principal, anneau principal. Morphisme d'anneaux, anneau quotient, anneau produit, isomorphisme d'anneaux.

Ne pas oublier. Les congruences sont compatibles à la multiplication. Traduction de la divisibilité, du pgcd, du ppcm, de la relation de Bézout en termes d'idéaux. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal (qui n'est un sous-anneau unitaire que si le morphisme est nul). Le lemme chinois. Formule de la somme partielle de la série géométrique, formule du binôme et somme partielle de la série géométrique homogène pour deux éléments qui commutent. Les anneaux intègres finis et commutatifs sont des corps.

1.3.3. Les résultats 1.2 et 1.3, l'existence et l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers et l'algorithme d'Euclide sont valables pour tout anneau principal.

Savoir faire. Calculs de congruences avec les idéaux, lemme chinois.

Exemples. Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $K[X]$ et $K[X]/P$, $K[X_1, \ldots, X_n]$.

1.3.4 Corps

Notions. Corps, morphisme de corps, caractéristique, sous-corps premier.

Ne pas oublier. Tout morphisme de corps est injectif.

1.3.4. *(Propriété universelle du corps des fractions)* Soit A un anneau commutatif intègre, alors il existe un unique corps $\mathrm{Frac}(A)$ contenant A et appelé corps des fractions de A qui vérifie la propriété suivante : *toute morphisme d'anneaux injectif de A dans un corps K est la composée de l'injection canonique $A \to \mathrm{Frac}(A)$ et d'un morphisme de corps $\mathrm{Frac}(A) \to K$.*

Exemples. Les corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $K(X)$.

1.3.5 Algèbres

Notions. Algèbre, algèbre monogène, polynôme minimal.

Ne pas oublier. Structure des sous-algèbre monogènes (resp. et intègres) d'une algèbre en termes de polynôme minimal. Les algèbres intègres de dimension finie et commutatives sont des corps.

Exemples. Les algèbres $K[X]$, $K[X]/P$ et $K[X_1, \ldots, X_n]$, l'algèbre $\mathbb{Q}(\alpha)$, où α est un nombre complexe, les algèbres $M_n(K)$ et $\mathrm{End}_K(E)$, l'algèbre $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.4 Polynômes

Notions. Algèbre de polynômes, degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Dérivation, formule de taylor. Fonction polynôme, racine, multiplicité, polynôme scindé, équation algébrique. Polynôme symétrique, polynômes symétrique élémentaire, polynômes de Newton.

Ne pas oublier. Degré et coefficient dominant d'une somme, d'un produit, $K[X]$ est intègre. Formule de Taylor. Toute famille à laquelle la restriction du degré est bijective est une base de $K[X]$. Si K est infini, $K[X]$ s'identifie à l'algèbre des fonctions polynômes. Structure des sous-algèbres monogènes d'une algèbre.

1.4.1. L'anneau $K[X]$ est principal.

1.4.2. *(Théorème de d'Alembert)* Les éléments irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont de degré ≤ 2 et ceux de $\mathbb{C}[X]$ sont de degré 1.

1.4.3. *(Relation coefficients-racines)* Soit P un polynôme scindé de $K[X]$ de degré $n \geq 1$ et de racines $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, alors pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, le i-ième coefficient de P est

$$(-1)^{n-i}\Sigma_{n-i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

où, pour $i = 1, \ldots, n$, Σ_i désigne le i-ième polynôme symétrique élémentaire.

1.4.4. *(Structure de l'algèbre des polynômes symétriques)* La sous-algèbre de $K[X_1, \ldots, X_n]$ des polynômes symétriques est une algèbre de polynômes en les polynômes symétriques élémentaires.

Savoir faire. Algorithme de la division euclidienne et de l'égalité de Bézout. Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles. Algorithme de Horner. Calcul de l'expression d'un polynôme symétrique en termes des polynômes symétriques élémentaires

1.5 Fraction rationnelle

Notions. Corps des fraction rationnelle, degré, partie entière, partie polaire. Fonction rationnelle, pôle, multiplicité.

Ne pas oublier. Degré d'un produit et d'une somme, décomposition en éléments simples de P'/P.

1.5.1. *(Décomposition en éléments simples)* Soit F un élément de $K(X)$, de représentant irréductible $P/\prod_{i=1}^{n} Q_i^{r_i}$, où $Q_1, \ldots, Q_n$ sont des polynômes irréductibles, alors il existe une unique famille de polynômes $E, R_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r_i$, vérifiant

$$F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{R_{i,j}}{Q_i^j},$$

et telle que $\deg R_{i,j} < \deg Q_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, r_i$.

Savoir faire. Décomposition pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, utilisation de la dérivation dans $K[X]$ pour le calcul de la partie polaire.

2 Algèbre linéaire

2.1 Espaces vectoriels

Notions. Espace vectoriel, sous-espace, espace quotient. Combinaison linéaire, colinéarité, famille libre, liée, génératrice, base, base canonique de K^n et $K[X]$, coordonnées. Dimension, codimension. Somme de sous-espaces, Somme directe, supplémentaire, drapeau, base adaptée à une décomposition ou à un drapeau.

2.1.1. *(Théorème de la dimension)* Soit E un K-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Alors le cardinal de toute famille libre de vecteurs de E est majoré par celui de toute famille génératrice.

2.1.2. *(Théorème de la base incomplète)* Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, alors on peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base en lui adjoignant des vecteurs d'une famille génératrice quelconque.

Exemples. Les espaces vectoriels K^n, $K^{\mathbb{N}}$, $K[X]$, $K(X)$, $L(E, F)$, $\mathrm{End}(E)$, où E et F sont des espaces vectoriels, l'espace vectoriel des fonctions sur un ensemble quelconque et à valeurs dans K.

2.2 Applications linéaires

Notions. Application linéaire, noyau, image, rang, isomorphisme d'espaces vectoriels, endomorphisme, trace, projecteur, familles de projecteurs adaptée à une décomposition.

Ne pas oublier. Une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base. Application $K^n \to E$ attachée au choix de n-vecteurs de E. La dimension est invariante par isomorphisme. Les supplémentaires d'un sous-espaces de E sont isomorphes entre eux (l'isomorphisme étant la restriction d'une projection adaptée) et au quotient de E par ce sous-espace (l'isomorphisme étant la restriction de la projection canonique). Le rang est invariant par composition avec un isomorphisme. La trace d'un projecteur est égal à son rang. La trace est invariante par conjugaison et $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$ pour tout couple (u, v) d'endomorphismes de E.

2.2.1. *(Théorème du rang)* Soit $f \colon E \to F$ une application linéaire entre K-espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim E = \mathrm{rang}\, f + \dim \ker f.$$

Savoir faire. Interpolation de Lagrange.

Exemples. La dérivation sur $K[X]$, l'action d'une matrice à coefficients dans K et à n colonnes sur un vecteur colonne à n coordonnées. La dérivation sur les fonctions dérivables, l'intégration sur les fonctions intégrables.

2.3 Dualité en dimension finie

Notions. Forme linéaire, hyperplan, équation d'un hyperplan, espace dual, forme bilinéaire canonique, transposition, base duale.

Ne pas oublier. Toute base du dual de E est la base duale d'une base de E. Un sous-espace de E est de codimension r si et seulement si c'est l'intersection des noyaux des formes linéaires d'une famille de rang r de E^*. Le rang d'une application linéaire est égal à celui de sa transposée.

Savoir faire. Système minimal d'équations définissant un sous-espace.

2.4 Calcul matriciel

Notions. Matrice, structure d'algèbre sur l'ensemble des matrices, rang d'une matrice, trace d'une matrice, matrice inversible, matrices équivalentes. Matrice attachée à une application linéaire sur des bases fixées, matrice de passage. Système d'équations linéaires homogène, non-homogène, rang d'un système, système de Cramer, opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, pivot de Gauss.

Ne pas oublier. Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice en termes de produit. Le rang d'une matrice diagonale (resp. triangulaire) est égal (resp. supérieur) au nombre de ses coefficients diagonaux non-nuls. Le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée. Le choix de bases de E et F induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $L(E, F)$ et $M_{n,m}(K)$, qui est un isomorphisme d'algèbres si $E = F$, où E (resp. F) est un espace vectoriel de dimension m (resp. n). Formule de changement de base. Un système de Cramer admet une unique solution.

2.4.1. Deux matrices de même taille sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

2.4.2. *(Pivot de Gauss)* Soit M une matrice $n \times m$ à coefficients dans K, alors il existe une matrice inversible U telle que UM soit triangulaire supérieure.

Savoir faire. Utiliser le pivot de Gauss pour calculer les solutions d'un système d'équations linéaires, un rang, un noyau, une image, déterminer si une application linéaire est inversible et calculer son inverse. Changement de base. Interprétation d'un système linéaire comme noyau d'une application linéaire et comme intersection des noyaux d'une famille de formes linéaires.

2.5 Déterminant

Notions. Applications et formes multilinéaires et multilinéaires symétriques, antisymétriques, alternées. Déterminant d'une famille de vecteurs sur une base, déterminant d'une application linéaire sur des bases, déterminant d'un endomorphisme. Orientation d'un espace vectoriel réel.

Ne pas oublier. Le déterminant d'une application linéaire est invariant par conjugaison par un isomorphisme. Le déterminant définit un morphisme de groupes de $\mathrm{Aut}(K)$ dans K^* invariant par la transposition. Le déterminant permet d'exprimer la solution d'un système de Cramer.

2.5.1. *(Propriété universelle du déterminant)* Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et B une base de E. Le déterminant sur B est l'unique forme n-linéaire alternée sur E^n prenant la valeur 1 sur B. Une famille de n vecteurs de E en est une base si et seulement si son déterminant sur B est non-nul.

2.5.2. *(Caractérisation des automorphismes)* Un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E en est un automorphisme si et seulement si son déterminant est non nul.

2.5.3. Soit M une matrice carrée, $\mathrm{Com}(M)$ la matrice de ses cofacteurs, alors

$$M^t \,\mathrm{Com}(M) = \det(M)\,\mathrm{Id}\,.$$

Exemples. La forme bilinéaire produit sur une algèbre et la forme bilinéaire symétrique produit scalaire sur un espace euclidien.

Savoir faire. Développer selon une ligne ou une colonne. Déterminants circulant, de Vandermonde, de Cauchy.

2.6 Géométrie affine

L'algèbre linéaire est à la base de la géométrie affine, voir à ce sujet *Panorama du programme des classes préparatoires : Géométrie.*

3 Réduction des endomorphismes

3.1 Sous-espaces stables

Notions. Sous-espace stable par un endomorphisme, drapeau, drapeau stable par un endomorphisme.

Ne pas oublier. Les endomorphismes laissant stable un drapeau ont une matrice trigonales par blocs sur une base adaptée à ce drapeau. Déterminant d'une matrice trigonale par blocs. Interprétation géométrique des matrices diagonales et trigonales. Si deux endomorphismes commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

3.2 Polynômes d'un endomorphisme

Notions. Polynôme minimal d'un endomorphisme, polynôme caractéristique.

Ne pas oublier. À tout endomorphisme de E est attaché un morphisme d'algèbres $K[X] \to \mathrm{End}(E)$. Le noyau et l'image d'un polynôme d'un endomorphisme sont stables par cet endomorphisme. Le polynôme minimal (resp. caractéristique) est invariant par conjugaison par un automorphisme. Interprétations du coefficient constant (resp. linéaire, resp. sous-dominant) du polynôme caractéristique. Matrice d'un endomorphisme dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique. Caractérisation des endomorphismes nilpotents en termes de polynôme minimal et caractéristique.

3.2.1. *(Lemme des noyaux)* Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie et P, Q deux polynômes à coefficients dans K premiers entre eux, alors

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

3.2.2. *(Théorème de Cayley-Hamilton)* Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et P le polynôme caractéristique de u, alors

$$P(u) = 0.$$

Savoir faire. Calculer le polynôme minimal d'un endomorphisme.

3.3 Réduction d'un endomorphisme

Notions. Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, sous-espace caractéristique. Matrices semblables, diagonalisation, trigonalisation.

Ne pas oublier. Interprétation des sous-espaces propres et caractéristiques d'un endomorphisme comme image d'un polynôme de cet endomorphisme. La somme des sous-espaces propres (resp. caractéristiques) attachés à des valeurs propres distinctes est directe, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Si deux endomorphismes commutent, alors tout espace propre (resp. caractéristique) pour l'un est stable pour l'autre. Valeurs et vecteurs propres des homothéties, des projecteurs, des symétries, des isométries, des affinités. Interprétation de la trace et du déterminant en termes de valeurs propres.

3.3.1. *(Critère de trigonalisation)* Une matrice carrée est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique (resp. minimal) est scindé.

3.3.2. *(Critère de diagonalisation)* Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et à racines simples.

3.3.3. *(Décomposition de Dunford)* Tout endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie est la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent qui commutent entre eux.

3.3.4. *(Décomposition de Jordan)* Toute matrice nilpotente a pour matrice sur une base adaptée une matrice par blocs dont les blocs sont des matrices dont la surdiagonale est constituée de 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

Savoir faire. Trigonalisation, diagonalisation, réduction de Jordan. Calcul de la matrice de passage. Utiliser le théorème de Bézout pour calculer les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme. Calculer une série en une matrice. Résoudre un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constant et calculer le terme général d'une famille de suites définie par une relation de récurrence linéaire.

4 Espaces euclidiens et espaces hermitiens

4.1 Formes bilinéaires et formes quadratiques

Notions. Forme bilinéaire, forme bilinéaire symétrique, forme quadratique, forme polaire. Noyau, rang et dégénérescence d'une forme bilinéaire. Rang, dégénérescence d'une forme quadratique, cône isotrope. Forme quadratique réelle positive, définie positive. Matrice de Gram d'une forme bilinéaire sur une base.

Ne pas oublier. La formule de changement de base pour la matrice d'une forme bilinéaire. En dimension finie, une forme bilinéaire est non dégénérée si et seulement si elle induit un isomorphisme entre l'espace et son dual.

4.1.1. *(Décomposition de Gauss)* Soit Q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, alors il existe une famille libre $(L_1, \ldots, L_n)$ de formes linéaires sur E et une famille de nombres réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que

$$Q = \lambda_1 L_1^2 + \ldots + \lambda_n L_n^2.$$

4.1.2. *(Théorème d'inertie de Sylvester)* Le nombre de réels strictement positifs (resp. strictement négatifs) dans la famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ne dépend pas de la famille $(L_1, \ldots, L_n)$.

Ne pas oublier. Si la signature d'une forme quadratique sur un espace de dimension finie k est (m, n), alors son rang est $m + n$. En particulier, cette forme est non dégénérée si et seulement si $m + n = k$, elle est positive si $n = 0$ et définie positive si $m = k$.

Savoir faire. Calculer un rang, un noyau, une décomposition de Gauss, une signature, un cône isotrope.

4.2 Espaces préhilbertiens réels et complexes

Notions. Forme sesquilinéaire, forme hermitienne, forme hermitienne positive, définie positive. Produit scalaire, norme. Espaces préhilbertiens. Orthogonalité, projection orthogonale, distance à un sous-espace.

4.2.1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz.)* Soit B une forme bilinéaire symétrique (resp. sesquilinéaire hermitienne) positive et non dégénérée sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ (resp. K), et x et y deux vecteurs de E, alors

$$|B(x, y)|^2 \leq B(x, x)B(y, y)\,;$$

de plus, si B est définie positive, alors l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Ne pas oublier. L'inégalité de Minkowski fait de tout espace préhilbertien un espace métrique, dont la topologie est indépendante de la norme choisie puisque toutes les normes sont équivalentes. On peut calculer le produit scalaire (resp. hermitien) en fonction de la norme. Le théorème de pythagore, l'égalité du parallélogramme. Un sous-espace et son orthogonal sont supplémentaires, l'orthogonal de l'orthogonal d'un sous-espace est ce sous-espace, a distance d'un point à ce sous-espace est égale à la distance de ce point à son projeté orthogonal sur ce sous-espace.

Savoir faire. Utiliser l'inégalité de Schwarz pour majorer des sommes finies (par exemple, pour établir l'inégalité $\operatorname{tr}(AB^tB^tA) \leq \operatorname{tr}(A^tA)\operatorname{tr}(B^tB)$, valable pour tout couple de matrices carrées (A, B)).

Exemples. Les espaces préhilbertiens $l^2(\mathbb{R})$, $l^2(\mathbb{C})$, $L^2(\mathbb{R})$, $l^2(\mathbb{C})$, $C([0, 1], \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, où n est un entier, l'espace $M_n(\mathbb{R})$ dont le produit scalaire canonique est $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^tB)$.

4.3 Espaces euclidiens et hermitiens

Notions.

Ne pas oublier. Le produit scalaire (resp. hermitien) sur un espace euclidien (resp. hermitien) E induit une isométrie (resp. antilinéaire) entre E et son dual. Il existe des bases orthonormées. Expression des coordonnées d'un vecteur sur une base orthonormée, inégalité de Parseval, égalité de Bessel.

4.3.1. *(Théorème d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)* Pour tout drapeau d'un espace vectoriel euclidien (resp. hermitien), il existe une base orthogonale adaptée à ce drapeau.

Savoir faire. Utiliser le théorème d'orthonormalisation, en particulier calculer les polynômes orthogonaux pour différents produits scalaires. Interprétation en termes de matrices (décompositions polaires, d'Iwasawa). Calcul d'une projection orthogonale et de la distance à un sous-espace.

4.4 Réduction des endomorphismes dans les espaces euclidiens et hermitiens

Notions. Adjonction, endomorphisme autoadjoint, antiautoadjoint, orthogonal, unitaire, isométrie, réflexion.

4.4.1. *(Réduction des endomorphismes autoadjoints)* Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace vectoriel euclidien (resp. hermitien) est diagonalisable.

4.4.2. *(Réduction des isométries)* Toute isométrie d'un espace vectoriel hermitien est diagonalisable. Toute isométrie d'un espace vectoriel euclidien a pour matrice sur une base orthogonale une matrice par blocs d'ordre 1 ou 2 qui sont soit ± 1, soit des matrices de rotation.

Ne pas oublier. Les valeurs propres d'une matrice autoadjointe positive (resp. définie positive, orthogonale, unitaire) sont positives (resp. strictement positives, resp. de module 1). Tout endomorphisme orthogonal est un produit de réflexions. Lien entre la réduction des endomorphismes autoadjoints avec la réduction des formes bilinéaires symétriques (resp. sesquilinéaires hermitiennes). La racine carrée est bien définie sur l'ensemble des matrices autoadjointes positives, décomposition de Cartan. Pour toute matrice carrée A, la norme d'opérateur de A est la plus grande valeur propre de A^*A.

Savoir faire. Réduction explicite d'un endomorphisme, écriture d'un endomorphisme orthogonal comme produit de réflexions. Calcul de la norme d'opérateur d'une matrice.

4.5 Géométrie euclidienne

La théorie des espaces vectoriels euclidiens est à la base de la géométrie euclidienne, voir *panorama du programme des classes préparatoires : géométrie*.

4.6 Classification des quadriques affines

Cette application importante de la réduction des endomorphismes dans les espaces euclidiens est également traitée dans *loc. cit.*.