# Mise sous forme implicite de courbes et de surfaces à paramétrages rationnels

Cet article compare sur des exemples les algorithmes de mise sous forme implicite optimale de courbes du plan ou de certaines surfaces paramétrées par des fractions rationnelles et introduit un nouvel algorithme évitant les écueils rencontrés (lenteur de calcul, non optimalité de l'équation obtenue).

## §1. Introduction

Étant donnée une courbe paramétrée du plan donnée par :

$$x(t) = \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{g_1(t)}{g_2(t)},$$

où $f_1$, $f_2$, $g_1$ et $g_2$ sont des fonctions polynômiales, on connaît plusieurs algorithmes pour en trouver une équation implicite cartésienne, un des plus connus est la méthode des résultants.

### La méthode des résultants

Soit la courbe donnée par :

$$x(t) = t^4 - t + 1, \qquad y(t) = t^3 + t + 1; \tag{1}$$

le calcul du résultant des polynômes en $t$ : $x(t) - x$ et $y(t) - y$ donne immédiatement une équation cartésienne implicite de la courbe :

$$23 - 18x - 34y + 13xy + 22y^2 - 7y^3 + 5x^2 - 4xy^2 + y^4 - x^3 = 0.$$

Remarquons la nécessité d'un calcul de déterminant symbolique.

Cet algorithme fonctionne aussi pour les surfaces. Soit la surface donnée par :

$$\begin{cases} x(t,s) &= \frac{t^2-2st-1}{t^2+1}, \\ y(t,s) &= \frac{2t+st^2+s}{t^2+1}, \\ z(t,s) &= s; \end{cases} \tag{2}$$

[C. Ruget (Ed), Mathématiques en situation, Springer 2001]



le calcul de :

$$\text{Resultant}(\text{Resultant}(x(t,s) - x, y(t,s) - y, t),\\ \text{Resultant}(x(t,s) - x, z(t,s) - z, t), s)$$

donne immédiatement une équation implicite de la surface[1]

$$\begin{aligned} 512yz + 512z^2x - 256z^2 - 512xyz - 512zx^2y - 256y^2 \\ - 256z^2y^2 + 512x^3zy - 512x^2 - 512yz^3x^2 \\ + 256z^2x^2y^2 + 256 - 256z^4 + 512z^3y + 256x^2y^2 \\ + 256z^2x^2 - 512x^3z^2 + 256z^4x^2 + 256x^4 = 0. \end{aligned}$$

Malheureusement, l'équation obtenue *n'est pas* optimale, en effet, on peut factoriser l'équation et se rendre compte de l'apparition de termes parasites :

$$256 \cdot (1+x) \cdot (-1+x) \cdot \\ (x^2 + 2xyz - 2z^2x + z^2y^2 - 1 + y^2 - 2yz + z^2 + z^4 - 2z^3y) = 0$$

Le calcul de factorisation étant difficile, cette méthode peut se révéler faiblement efficace.

## §2. Un algorithme efficace donnant une forme implicite optimale

**Définition 2.1.** *Soient $f$ et $g$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, le polynôme $f$ ayant dans $\mathbb{C}$ les racines $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ distinctes de multiplicités respectives $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ (i.e. le polynôme $f$ s'écrit :*

$$K \prod_{k=1}^{s} (T - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

*dans $\mathbb{C}[T]$) ; on appelle* trace *de $g$ sur $f$ et on note $\tau_f(g)$ :*

$$\tau_f(g) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k g(\lambda_k).$$

[1] On peut remarquer dans cet exemple particulier que l'élimination de $s$ est très aisée (c'est $z$), aussi peut-on gagner en vitesse en calculant directement : Resultant$(x(t,z) - x, y(t,z) - y, t)$. En ce cas, on obtient une équation cartésienne optimale.

**Théorème 2.1.** *Le nombre $\tau_f(g) \in \mathbb{Q}$ est le coefficient de $T^{-1}$ de la fraction rationnelle*

$$\frac{g(T).f'(T)}{f(T)} \in \mathbb{Q}(T),$$

*lorsqu'on la développe suivant les puissances décroissantes.*

**Définition 2.2.** *Si $x_1, \ldots, x_n$ sont $n$ variables, les fonctions symétriques élémentaires des $x_k$ sont redéfinies par* [2] *:*

$$\prod_{k=1}^{n}(T - x_k) = T^n + \sigma_1 T^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1}T + \sigma_n.$$

On portera donc attention aux signes de ces expressions.

**Définition 2.3.** *Soient $x_1, \ldots, x_n$ $n$ variables. On appelle* somme de Newton de rang *$k$ et on note $S_k(x_1, \ldots, x_n)$ l'expression définie par :*

$$S_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j^k.$$

**Proposition 2.1 (Formules de Newton).** *Soient $x_1, \ldots, x_n$ $n$ variables, soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. On a, en notant $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ :*

$$j\sigma_j(\underline{x}) + S_j(\underline{x}) + S_{j-1}(\underline{x})\sigma_1(\underline{x}) + \cdots + S_1(\underline{x})\sigma_{j-1}(\underline{x}) = 0.$$

**Théorème 2.2 (Cas polynômial).** *Soit $C$ une courbe définie par une paramétrisation polynômiale :*

$$x = f(t) \qquad y = g(t),$$

*où $f$ et $g$ sont des polynômes et où $n$ est le degré de $g$. Alors, si $t_1, \ldots, t_n$ sont les $n$ racines (distinctes ou confondues) de $g(t) = y$, dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}(y)$, si on pose $r_k(y) = \sigma_k(f(t_1), \ldots, f(t_n))$ et $S_k(y) = S_k(f(t_1), \ldots, f(t_n))$, l'équation implicite de $C$ est la partie sans carré du polynôme :*

$$x^n + r_1(y)x^{n-1} + \cdots + r_n(y),$$

*où les $r_k(y)$ se calculent par les formules :*

$$kr_k(y) = -S_k(y) - S_{k-1}(y)r_1(y) - \cdots - S_1(y)r_{k-1}(y),$$

[2] le $\sigma_0$ sera choisi de manière à ce que la formule de Newton de la proposition 1 soient vérifiée au rang 1



*où chaque $S_j(y)$ est le coefficient de $t^{-1}$ dans le développement de :*

$$\frac{(f(t))^j g'(t)}{g(t) - y}$$

*suivant les puissances décroissantes.*

– *Exemple 2* : pour la courbe (1) page 117, on obtient successivement :

$$3t^3 - 2t - 6 + 3y + 5\frac{1}{t} + \frac{7-5y}{t^2} + \frac{-4+(6-3y)(1-y)}{t^3}$$
$$+ \frac{-12+10y}{t^4} + \frac{(-7+5y)(1-y) - 2 + 9y - 3y^2}{t^5}$$
$$+ \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^6}\right) = \frac{f(t)g'(t)}{g(t)-y}, \ldots$$

$$\begin{aligned}
S_1(y) &= 5\\
S_2(y) &= -11 + 26y - 8y^2\\
S_3(y) &= -76 + 93y + 6y^2 - 21y^3 + 3y^4\\
r_1(y) &= -5\\
r_2(y) &= 18 - 13y + 4y^2\\
r_3(y) &= -23 + 34y - 22y^2 + 7y^3 - y^4.
\end{aligned}$$

Et l'équation cherchée :

$$x^3 - 5x^2 - (13y - 18 - 4y^2)x + 7y^3 - 22y^2 + 34y - y^4 - 23 = 0.$$

**Théorème 2.3 (Cas rationnel).** *Soit $C$ une courbe définie par une paramétrisation rationnelle :*

$$x = \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \qquad y = \frac{g_1(t)}{g_2(t)},$$

*où $f_1$ et $f_2$ (resp. $g_1$ et $g_2$) sont des polynômes premiers entre eux, et où $n$ est le maximum des degrés de $g_1$ et $g_2$. Alors l'équation implicite de $C$ est la partie sans carré du polynôme :*

$$x^n + r_1(y)x^{n-1} + \cdots + r_n(y),$$

*où les $r_k(y)$ se calculent par les formules :*

$$kr_k(y) = -S_k(y) - S_{k-1}(y)r_1(y) - \cdots - S_1(y)r_{k-1}(y),$$

*où chaque $S_j(y)$ est le coefficient de $t^{-1}$ dans le développement de :*

$$\frac{(u(y,t)f_1(t))^j(g_1'(t) - yg_2'(t))}{g_1(t) - yg_2(t)},$$

*suivant les puissances décroissantes, le polynôme $u$ étant le coefficient de Bézout $\in \mathbb{Z}(y)[t]$ dans :*

$$u(y,t)f_2(t) + v(y,t)(g_1(t) - yg_2(t)) = 1.$$

– *Exemple 1* : pour la surface (2) page 117, on obtient successivement (prenant $z$ comme constante, ce qui permet de considérer la surface comme paramétrée par $t$) :

$$u(y,t) = \frac{1}{2}zt - \frac{1}{2}ty + 1.$$

Pour $j = 1$ le calcul de $S_1(y)$ donne :

$$\begin{aligned}
\frac{u(y,t)f_1(t)(g_1'(t) - yg_2'(t))}{g_1(t) - yg_2(t)} &= \frac{\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}y\right)(-2y+2z)t^2}{-y+z} \\
&+ \frac{\left(-z + y + \left(-2\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}y\right)z + 1\right)(-2y+2z)\right)t}{-y+z} \\
&+ \left(-4\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}y\right)z + \left(-\frac{5}{2}z + \frac{1}{2}y\right)(-2y+2z)\right. \\
&+ \left.(y-z)(-y+z) + 4z^2 - 4zy\right) / (-y+z) \\
&+ \frac{z - y + (2z^2 - 2zy - 1)(-y+z)}{(-y+z)t} \\
&+ \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right),
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_1(y) &= 2(-y+z)z \\
S_2(y) &= 2z^4 - 4z^3y + 2z^2y^2 - 2z^2 + 4zy - 2y^2 + 2 \\
r_1(y) &= -(2(-y+z)z) \\
r_2(y) &= y^2 - 2zy + z^2 + z^4 + z^2y^2 - 2z^3y - 1.
\end{aligned}$$



d'après *New Elimination Tools Based on Symmetric Functions for the Implicitization of Parametric Curves and Surfaces*,
L. Gonzalez-Vega,
*ACA Proceedings* (1995)

## Développements possibles suggérés pour le commentaire

1. Justifier l'existence du terme parasite dans l'exemple du paragraphe 1 commençant page 118.
2. Démontrer le théorème (2.1) énoncé page 119.
3. Démontrer les formules de Newton énoncées à la proposition (2.1) page 119.
4. Valider les calculs de l'exemple (2) commençant page 120.
5. Valider les calculs de l'exemple (2) commençant page 121.