Master 2 "Modèles rationnels pour l'homotopie" 2004-05

Corrigé de l'examen

1) V $\mathbb{Q}$-ev gradué nul en degré ≤ 0 et en degré impair. Alors ΛV est nul en degré impair. Si d est une différentielle sur ΛV, d est de degré $+1$ $\left(d : (\Lambda V)^n \to (\Lambda V)^{n+1}\right)$ donc d est nulle.
$(\Lambda V, 0)$ est une adgc, c'est la seule structure d'adgc possible sur ΛV, elle est minimale.

2) $L = \Lambda(u, v, du = 0, dv = u^n)$ avec $|u|$ pair ≥ 2 et n entier >0

Comme $|dv| = |u^n| = n|u|$ on a $|v| = n|u| - 1$ impair

$\Lambda(u,v) = \mathbb{Q}[u] \otimes \Lambda(v)$ comme algèbre car $|u|$ est pair et $|v|$ est impair

$$= \begin{cases} \mathbb{Q}.u^k \text{ en degré } k|u|, \ k \in \mathbb{N} \\ \mathbb{Q}.u^k v \text{ en degré } (k+n)|u| - 1, \ k \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ en les autres degrés} \end{cases}$$

$d(u^k) = k\, u^{k-1} du = 0$

$d(u^k v) = d(u^k)\, v + (-1)^{|u^k|} u^k dv = u^{k+n}$

$\leadsto \{\text{cocycles}\} = \operatorname{Ker} d = \mathbb{Q}[u] \subset \Lambda(u,v)$ C'est une sous algèbre graduée de $\Lambda(u,v)$

$\{\text{cobords}\} = \operatorname{Im} d = \mathbb{Q} \cdot \{u^{k+n}, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}[u].\{u^n\}$ comme sous $\mathbb{Q}[u]$-Module de $\Lambda(u,v)$

$H^*(\Lambda(u,v), d) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d = \mathbb{Q}[u] / \mathbb{Q}[u].u^n \simeq \mathbb{Q}[u] / (u^n)$ comme algèbre graduée.

$(\Lambda(u,v), d)$ est une algèbre de Sullivan avec la filtration $V(0) = \mathbb{Q}.u \subset V(1) = \mathbb{Q}.u + \mathbb{Q}.v$

Pour que $(\Lambda(u,v), d)$ soit minimale il faut que dv soit décomposable donc que n soit ≥ 2

Si $n = 1$, $H(\Lambda(u,v), d) \cong \mathbb{Q}$ concentré en degré 0. L'adgc $(\mathbb{Q}, 0)$ est minimale et l'unique morphisme $(\mathbb{Q}, 0) \to (\Lambda(u,v), d)$ est un quasi-iso donc $(\mathbb{Q}, 0)$ est le modèle minimal de $(\Lambda(u,v), d)$

3a) V $\mathbb{Q}$-ev gradué concentré en degré 1. $$H^1(\Lambda(V), d) = \frac{\operatorname{Ker}\left(d : (\Lambda V)^1 \to (\Lambda V)^2\right)}{\operatorname{Im}\left(d : (\Lambda V)^0 \to (\Lambda V)^1\right)}$$

or $d_{|(\Lambda V)^0} = 0$ et $(\Lambda V)^1 = V^1$ donc $H^1(\Lambda V, d) = \{v \in V^1, dv = 0\}$

On suppose $(\Lambda V, d)$ algèbre de Sullivan donc $\exists\, V(0) \subset V(1) \subset \dots \subset V$ avec $\bigcup_k V(k) = V$ et $d_{|V(k)} \subset \Lambda V(k-1)$ pour tout $k > 0$

si d est nulle, on a $H^1(\Lambda V, d) = V$

si d est non nulle, soit k le plus petit entier avec $d_{|V(k)} \neq 0$, $v \in V(k)$ avec $dv \neq 0$.

$dv \in (\Lambda V(k-1))^2$ donc, puisque V est concentré en degré 1, dv s'écrit $\sum_\alpha v_\alpha w_\alpha$ avec $v_\alpha, w_\alpha \in V(k-1)$

choisissons l'un des α tq $v_\alpha w_\alpha \neq 0$ alors v_α n'est pas colinéaire à w_α dans V $\quad (\forall v \in V, |v| = 1$ donc $v^2 = 0)$

$v_\alpha, w_\alpha \in V(k-1)$ ~~donc~~ et $d_{|V(k-1)} = 0$ par définition de k

Conclusion $H^1(\Lambda V, d) \cong \operatorname{Ker}\left(d : V \to (\Lambda V)^2\right)$ est de dimension au moins 2 si d est non nulle, $H^1(\Lambda V, d) \cong V$ si d est nulle.

Exemple $V = \mathbb{Q}$ en degré 1, $d = 0$ alors $H^1(\Lambda V, d) = V = \mathbb{Q}$

$V = \mathbb{Q}.\{v_1, v_2, v_3\}$ $\quad dv_1 = dv_2 = 0$, $dv_3 = v_1 v_2$

3b) $L = \Lambda(u,v, du = uv, dv = uv)$ où $|u| = |v| = 1$. Si L est une algèbre de Sullivan, on peut appliquer les résultats de 3a) : soit $d = 0$ ce qui n'est pas, soit $\dim_{\mathbb{Q}} H^1(L,d) \geq 2$

Or $H^1(L) = \mathrm{Ker}(d : L^1 \to L^2) = \{\lambda u + \mu v \ ; (\lambda,\mu) \in \mathbb{Q}^2, d(\lambda u + \mu v) = 0\} = \{\lambda u - \lambda v, \lambda \in \mathbb{Q}\}$ de dim 1 sur $\mathbb{Q}$

donc L n'est pas une algèbre de Sullivan

4) On pose $A = \Lambda(u, v, du = 0, dv = u^2)$ avec $|u| = 4$ et $B = \Lambda(\omega, d\omega = 0)$ avec $|\omega| = 3$

4a) A est une algèbre de Sullivan minimale d'après 2) et $H(A) \cong \mathbb{Q}[u]/_{u^2}$

Clairement B est une algèbre de Sullivan minimale et $H(B) \cong B$

4b) Soit L l'adgc $\Lambda(u', v', \omega')$ avec $|u'| = 4, |v'| = 7, |\omega'| = 3$, $i : A \to L$, $u \mapsto u'$, $v \mapsto v'$

$p : L \to B$, $u' \mapsto 0$, $v' \mapsto 0$, $\omega' \mapsto \omega$

Soit d une différentielle sur L en faisant une adgc compatible avec les morphismes i et p

d est déterminée par sa restriction à $V = \mathbb{Q}\{u', v', \omega'\}$.

d compatible avec i entraîne $du' = i(du) = 0$, $dv' = i(dv) = u'^2$

$d\omega' \in L^4 = \mathbb{Q}\{u'\}$ donc $d\omega' = a u'$ pour un $a \in \mathbb{Q}$. Tout choix de $d\omega'$ rend d compatible avec p

On note L_a cette adgc

4c) On observe $L_0 \cong (A,d) \otimes (B,d)$: la somme de A et B dans la catégorie des adgc

Si a, b sont non nuls, l'application $L_a \to L_b$, $u' \mapsto u'$, $v' \mapsto v'$, $\omega' \mapsto \frac{a}{b}\omega'$ est un isomorphisme entre adgc ~~compatible~~ faisant commuter le triangle
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i"] & \\ L_a \arrow[rr] & & L_b \end{tikzcd}$$
De même l'application $L_a \to L_b$, $u' \mapsto \frac{b}{a} u'$, $v' \mapsto \left(\frac{b}{a}\right)^2 v'$, $\omega' \mapsto \omega'$ est un iso entre adgc faisant commuter le triangle
$$\begin{tikzcd} L_a \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & L_b \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

4d) $(L_1)^7 = \mathbb{Q}\{v', u'\omega'\}$. On a $dv' = u'^2$ et $d(u'\omega') = u' d\omega' = u'^2$ donc $\mathrm{Ker}(d|_{(L_1)^7}) = \mathbb{Q}\cdot\{v' - u'\omega'\}$

$(L_1)^6 = \mathbb{Q}\cdot\omega'^2 = \{0\}$ donc $\mathrm{Im}\, d|_{(L_1)^6} = \{0\} \subset (L_1)^7$ donc $H^7(L_1) \cong \mathrm{Ker}\, d/_{\mathrm{Im}\, d} \cong \mathbb{Q}\cdot\{[v' - u'\omega']\}$ de dimension 1 comme $\mathbb{Q}$-esp. vect.

< On abandonne les ' des elts u', v', ω' >

les éléments u^k, $u^k v$, $u^k \omega$ et $u^k v\omega$, $k \in \mathbb{N}$, forment une base de $\bigoplus_i (L_1)^i$ comme $\mathbb{Q}$-esp. vectoriel, concentré en degrés $4k, 4k+3$ et $4k+10$

On a $d(u^k) = 0$, $d(u^k v) = u^k dv = u^{k+2}$

$d(u^k \omega) = u^k d\omega = u^{k+1}$

$d(u^k v\omega) = u^k d(v\omega) = u^k(dv.\omega - v.d\omega) = u^{k+2}\omega - u^{k+1}v$ $\quad (vu = uv)$

$= u^{k+1}(u\omega - v)$

$\{$cocycles en degré $4k\} = \mathbb{Q}.u^k = \{$cobords$\}$ si $k \geq 1$

$\{$cocycles en degré $4k+3\} = \mathbb{Q}.u^{k-1}(u\omega - v)$ si $k \geq 1$, $\{0\}$ sinon

$= \{$cobords$\}$ si $k \geq 2$

$\{$ cocycles en degrés $4k+10\} = \{0\}$

Conclusion $H^k(L_1) \simeq \mathbb{Q}$ si $k = 0$ ou 7, engendré respectivement par la classe de 1 et la classe de $u\omega - v$

$= \{0\}$ si $k \notin \{0, 7\}$

L_1 est une algèbre de Sullivan avec la filtration $V(0) = \mathbb{Q}.u \subset V(1) = \mathbb{Q}.\{u, v, \omega\}$.

Elle n'est pas minimale puisque $d\omega = u$ n'est pas décomposable.

L'algèbre $\Lambda(x, dx = 0)$ avec $|x| = 7$ est évidemment minimale. L'application $\Lambda(x) \to L_1$, $x \mapsto uv - \omega$ est compatible avec la différentielle et induit un isomorphisme en homologie. Elle fait donc de $(\Lambda(x), 0)$ le modèle minimal de L_1

4e) Soit $f : L_a \to L_b$ morphisme d'adgc au dessous de A et au dessus de B. f est déterminé par sa restriction à $V = \mathbb{Q}.\{u, v, \omega\}$

Il faut $f(u) = u$ et $f(v) = v$ pour que f soit compatible avec $i : A \to L_a$ et $i : A \to L_b$

$f(\omega) \in (L_b)^3 = \mathbb{Q}.\omega$ Il faut $f(\omega) = \omega$ pour que f soit compatible avec $p : L_a \to B$ et $p : L_b \to B$

Or f compatible avec la différentielle entraîne $\underbrace{f(d\omega)}_{= f(au) = au} = \underbrace{d f(\omega)}_{= d\omega = bu}$ donc $a = b$

Conclusion : f existe si et seulement si $a = b$ auquel cas f est l'identité.

5) Soit n un entier ≥ 1. On considère l'adgc $\Lambda(x, dx = 0)$ avec $|x| = n$

5a) Soit (A, d) une adgc telle que $H(A) \simeq \Lambda(x)$ comme $\mathbb{Q}$-algèbre graduée. Soit $f : \Lambda(x) \to H(A)$ un tel isomorphisme. $f(x) \in H^n(A)$ provient d'un n cocycle, disons a, de A. On considère $\hat{f} : \Lambda(x) \to A$ l'unique application de $\mathbb{Q}$ alg graduées ~~commutatives~~ vérifiant $\hat{f}(x) = a$. Alors $d\hat{f}(x) = 0 = \hat{f}(dx)$. On en déduit $\forall k \in \mathbb{N}$, $d\hat{f}(x^k) = 0 = \hat{f}(dx^k)$ donc $\hat{f}$ est un morphisme d'adgc.

De plus $H(\hat{f}) : \underbrace{H(\Lambda(x))}_{\simeq \Lambda(x)} \to H(A)$ est un morphisme de $\mathbb{Q}$-alg graduées vérifiant $H(\hat{f})(x) = [a] = f(x)$. Par unicité $H(\hat{f}) = f$ donc $\hat{f}$ est un quasi-isomorphisme.

5b) Soit (A, d) une adgc. Un morphisme de $\mathbb{Q}$-alg graduées $f : \Lambda(x) \to A$ est caractérisé par la donnée de $f(x) \in (A)^n$

f est un morphisme d'adgc ssi $\forall k \in \mathbb{N}$ $d f(x^k) = f(d(x^k)) = f(0) = 0$. On a $d f(x^k) = d((f(x))^k)$

Si n est impair, x^k est nul dès que $k \geq 2$ donc également $d f(x^k)$. On a $d f(1) = d 1 = 0$. Il reste la condition $d f(x) = 0$

Si n est pair alors $f(x)$ est de degré pair donc $d((f(x))^k) = k f(x)^{k-1} d f(x)$ pour $k \geq 1$, de sorte que la condition $\forall k$ $d f(x^k) = 0$ équivaut à la condition $d f(x) = 0$

Conclusion : f est un morphisme d'adgc ssi $d f(x) = 0$.

On déduit de tout ceci que l'application $\mathrm{Hom}_{adgc}(\Lambda(x), A) \to (A)^n$, $f \mapsto f(x)$ est injective d'image $Z^n(A)$.

On considère $\Lambda(t,dt)$ avec $|t|=0$, $d(t)=dt$
$|dt|=1$

5c) $\Lambda(t,dt) \simeq \mathbb{Q}[t]\otimes_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}.dt)$ comme $\mathbb{Q}$-alg graduée. On a pour tout entier n
$$(\Lambda(t,dt))^n \simeq \mathbb{Q}[t] \text{ si } n=0$$
$$\simeq \mathbb{Q}[t].dt \text{ si } n=1$$
$$= \{0\} \text{ si } n\geq 2$$

$A\otimes\Lambda(t,dt)$ est le $\mathbb{Q}$-~~dg~~ ev gradué engendré par les el^{ts} $a\otimes p(t)$ et $a\otimes p(t)dt$ pour a élément homogène de A et $p(t)$ un élément de $\mathbb{Q}[t]$, modulo les relations de bilinéarité pour l'application $A\times\Lambda(t,dt)\to A\otimes\Lambda(t,dt)$

On a $|a\otimes p(t)|=|a|$ et $|a\otimes p(t)dt|=|a|+1$

La multiplication sur $A\otimes\Lambda(t,dt)$ est donnée par $(a\otimes P)\cdot(b\otimes Q) = (-1)^{|P|\cdot|b|}\, ab\otimes PQ$ pour a, b, P, Q des éléments homogènes de A et de $\Lambda(t,dt)$ respectivement, étendue par bilinéarité.

L'application $A\to A\otimes\Lambda(t,dt)$, $a\mapsto a\otimes 1$ fait de $A\otimes\Lambda(t,dt)$ une A-algèbre commutative (au sens gradué). On se convainc que cette A-algèbre graduée est librement engendrée par les éléments $1\otimes t$ et $1\otimes dt$. Tout el^t de degré n de $A\otimes\Lambda(t,dt)$ s'écrit $\sum_{i=0}^{k} a_i\otimes t^i + \sum_{i=0}^{\ell} b_i\otimes t^i dt$ pour des entiers k et ℓ et des familles (a_i) et (b_i) d'éléments de A de degré n et $n-1$ respectivement.

En réécrivant t, respectivement dt, les éléments $1\otimes t$, resp. $1\otimes dt$, de $A\otimes\Lambda(t,dt)$, on obtient que tout élément homogène de degré n de $A\otimes\Lambda(t,dt)$ s'écrit $p(t)+q(t)\,dt$ avec p et q des polynômes de $A[t]$ dont les coefficients sont homogènes de degré n et $n-1$ respectivement.

Attention : dt commute avec $q(t)$ avec un signe $dt\cdot q(t) = (-1)^{|dt|\cdot|q(t)|}\, q(t)\,dt = (-1)^{n-1} q(t)\,dt$ puisque $|q(t)|=n-1$.

La différentielle sur $A\otimes\Lambda(t,dt)$ est donnée par $d(a\otimes P) = da\otimes P + (-1)^{|a|} a\otimes dP$ pour a et P des el^{ts} homogènes de A et $\Lambda(t,dt)$

donc $d(a\otimes t^i) = da\otimes t^i + (-1)^{|a|} a\otimes d(t^i)$

Or, puisque $|t|$ est pair, $d(t^i) = i\,t^{i-1}dt$ si $i\geq 1$
$= 0$ si $i=0$

$d(a\otimes t^i dt) = da\otimes t^i dt + (-1)^{|a|} a\otimes d(t^i dt)$. On a $d(t^i dt) = d(t^i)dt + t^i d(dt) = i\,t^{i-1} dt.dt = 0$

(5c) On obtient $d\left(\sum_i (a_i t^i + b_i t^i dt)\right) = \sum_i \left[(da_i) t^i + \left(db_i + (i+1) a_{i+1}\right) t^i dt\right]$

L'élément $\sum_i (a_i t^i + b_i t^i dt)$ est un cocycle ssi $\forall i \; da_i = 0$ et $db_i + (i+1)a_{i+1} = 0$

ce qui équivaut à $\begin{cases} da_0 = 0 \\ \forall i \geq 0 \; a_{i+1} = -\dfrac{db_i}{i+1} \end{cases}$

c'est un cobord ssi $\exists (a'_i), (b'_i)$ familles d'éléments homogènes de A tq $\forall i, a_i = da'_i$ et $b_i = d b'_i + (i+1) a'_{i+1}$

ce qui équivaut à $\begin{cases} \exists a'_0, \; a_0 = da'_0 \\ \forall i \geq 0, \; a_{i+1} = -\dfrac{db_i}{i+1} \end{cases}$ (pour des familles $(a_i), (b_i)$ vérifiant ces conditions il suffit de choisir a'_0 tq

$a_0 = da'_0$, de choisir (b'_i) une famille quelconque d'éléments de A de degré $n-2$ et de prendre $a'_{i+1} = \dfrac{+b_i - db'_i}{i+1}$)

5d) Soit $h : \Lambda(x) \to A \otimes \Lambda(t, dt)$ un morphisme d'adgc. D'après 5b $h(x)$ est un n-cocycle de $A \otimes \Lambda(t,dt)$ (et h est déterminé par ce n-cocycle). Écrivons $h(x) = p(t) + q(t) dt$, où $p(t) = \sum a_i t^i$ et $q(t) = \sum b_i t^i$

On a $(\varepsilon_0 \circ h)(x) = \underbrace{p(0)}_{= a_0}$ et $(\varepsilon_1 \circ h)(x) = \underbrace{p(1)}_{= \sum_i a_i}$ donc $(\varepsilon_0 \circ h)(x) - (\varepsilon_1 \circ h)(x) = p(0) - p(1) = -\sum_{i \geq 1} a_i$

D'après (5c) on a $\forall i \geq 1 \;\; a_i = -\dfrac{d b_{i-1}}{i} = d\left(-\dfrac{b_{i-1}}{i}\right)$ donc $-\sum_{i\geq 1} a_i = d\left(\sum_{i \geq 1} \dfrac{+b_{i-1}}{i}\right)$.

Conclusion $(\varepsilon_0 \circ h)(x) - (\varepsilon_1 \circ h)(x)$ est un cobord.

On en déduit que si f et g sont deux morphismes homotopes $\Lambda(x) \to A$ alors $f(x) - g(x)$ est un cobord.

D'après 5b) l'application $\mathrm{Hom}_{Adgc}(\Lambda(x), A) \to (A)^n$, $f \mapsto f(x)$ est à valeurs dans $Z^n(A)$. La composée

$\mathrm{Hom}_{Adgc}(\Lambda(x), A) \to Z^n(A) \to H^n(A)$ est constante sur les classes d'équivalences pour la relation d'homotopie donc passe au quotient

5e) Soient f, g deux morphismes d'adgc $\Lambda(x) \to A$ tels que $f(x) - g(x)$ soit un cobord dans A.

Posons $a_0 = f(x)$ et $a_1 = f(x) - g(x)$. Par hypothèse $\exists b_0 \in (A)^{n-1}, \, a_1 = db_0$

Soit h le morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres graduées $\Lambda(x) \to A \otimes \Lambda(t, dt)$ tel que $h(x) = a_0 - a_1 t + b_0 dt$

Comme f est un morphisme d'adgc on a $d f(x) = 0 = da_0$. On en déduit que $h(x)$ est un cocycle, ~~et~~ donc, d'après 5b, que h est un morphisme d'adgc.

On a $\begin{cases} (\varepsilon_0 h)(x) = a_0 = f(x) \text{ donc } \varepsilon_0 h = f \\ (\varepsilon_1 h)(x) = a_0 - a_1 = g(x) \text{ donc } \varepsilon_1 h = g \end{cases}$ donc h est une homotopie entre f et g

5f) Observons que $\Lambda(x)$ est une algèbre de Sullivan (Elle est même minimale)

La relation d'homotopie entre morphismes d'adgc $\Lambda(x) \to A$ est donc une relation d'équivalence et l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation s'identifie avec l'ensemble des morphismes de $\Lambda(x)$ dans A dans la catégorie homotopique $hAdgc$.

D'après 5b l'application $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(\Lambda(x), A) \to (A)^n$, $f \mapsto f(x)$ induit une bijection $\mathrm{Hom}_{adgc}(\Lambda(x), A) \to Z^n(A)$

D'après 5d cette bijection est un côté d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{adgc}(\Lambda(x), A) \arrow[r] \arrow[d] & Z^n(A) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{adgc}(\Lambda(x), A)/\sim \arrow[r] & H^n(A) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les projections canoniques donc sont surjectives. L'application $\mathrm{Hom}_{Adgc}(\Lambda(x), A)/\sim \;\to H^n(A)$ est donc surjective.

Soient f et g deux morphismes d'adgc $\Lambda(x) \to A$ ayant même image dans $H^n(A)$, donc tels que $f(x) - g(x)$ soit un cobord de $(A)^n$, alors f est homotope à g d'après 5c. Autrement dit l'application $\mathrm{Hom}_{Adgc}(\Lambda(x), A)/\sim \;\to H^n(A)$ est injective.

Conclusion : l'application $f \mapsto f(x)$ induit une bijection $\mathrm{Hom}_{hAdgc}(\Lambda(x), A) \to H^n(A)$. Comme cette bijection est naturelle en A, on obtient que le foncteur $hAdgc \to Ens$, $A \mapsto H^n(A)$ est représentable par l'adgc $\Lambda(x)$ (et la classe de x dans $H^n(\Lambda(x)) \simeq \mathbb{Q}\cdot x$)