

# Reconstruction du champ des vitesses d'une houle longue

Didier CLAMOND

Institut des sciences de l'ingénieur de Toulon et du Var, BP 56, 83162 La Valette du Var cedex, France  
E-mail : clamond@isitiv.univ-tln.fr

(Reçu le 13 février 1997, accepté après révision le 17 novembre 1997)

---

**Résumé.** Partant de la théorie de l'eau peu profonde, une transformation analytique simple permet de reconstruire, dans toute la masse fluide, le champ des vitesses induit par l'onde. L'approximation ainsi obtenue est plus réaliste et respecte l'incompressibilité du fluide. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

**ondes longues / eau peu profonde / vitesses / reconstruction**

## *Reconstruction of a long wave velocity field*

**Abstract.** *From the shallow water gravity wave theory, an analytic transformation reconstructs the velocity field in all the fluid domains. The solution obtained is more realistic and non-divergent.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

**long waves / shallow water / velocity / reconstruction**

---

## 1. Introduction

Des systèmes de mesures non intrusifs, tel l'anémomètre laser, permettent de mesurer le champ des vitesses induit par une onde de gravité [1]. Dans de nombreuses situations pratiques, on a affaire à des houles longues (relativement à la profondeur) et la confrontation théorie-expérience s'avère délicate. En effet, la théorie qui décrit ces ondes – la théorie de l'eau peu profonde – donne en première approximation, un champ des vitesses uniforme sur la verticale. Une telle approximation ne respecte pas l'incompressibilité du fluide. Si l'on veut déterminer plus précisément le champ des vitesses, il faut résoudre les ordres supérieurs. Cela présente plusieurs inconvénients : i) il faut effectuer des calculs dont la complexité croît très vite en fonction de l'ordre de la résolution, ii) la série obtenue est divergente [2] et la solution est d'autant moins bonne que l'ordre de la résolution est élevé, iii) l'approximation considérée ne vérifie pas de manière exacte la non-divergence du champ des vitesses. Pour combler ces lacunes, il est intéressant de reconstituer le champ des vitesses à partir de la première approximation uniquement.

---

Note présentée par René MOREAU.

## D. Clamond

### 2. Technique de reconstruction

Pour l'étude des ondes de gravité surfaciques cylindriques sur fond horizontal, on considère généralement l'écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible. Soit  $x$  la variable horizontale,  $y$  la variable verticale ascendante,  $t$  le temps,  $u$  la vitesse horizontale et  $v$  la vitesse verticale. Le fond se situe à la cote  $y = 0$  et la surface en  $y = h + \eta(x, t)$ ,  $h$  étant la profondeur moyenne et  $\eta$  la position de la surface par rapport au niveau du repos. L'irrotationnalité de l'écoulement implique l'existence d'un potentiel des vitesses  $\varphi$ . L'incompressibilité du fluide et l'imperméabilité du fond astreignent alors  $\varphi$  à vérifier :

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq y \leq h + \eta, \quad \varphi_y = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (1)$$

On vérifie aisément que la solution la plus générale de (1) est :

$$\varphi(x, y, t) = f(x + iy, t) + f(x - iy, t) \quad (2)$$

où  $f$  est une fonction arbitraire. Un développement de Taylor de  $f$  en  $x$  donne :

$$\varphi(x, y, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} f(x, t)}{\partial x^{2n}} \quad (3)$$

On retrouve en (3) le développement de  $\varphi$  utilisé par [3]. En outre, puisque  $2f(x, t) = \varphi(x, y=0, t)$ ,  $2f(x, t)$  représente le potentiel des vitesses sur le fond. C'est la même fonction,  $f$ , qui intervient dans l'expression du potentiel sur le fond et dans tout le domaine ; seul son argument (i.e.  $x + iy$  au lieu de  $x$ ) est différent. Ainsi, la simple connaissance du potentiel sur le fond permet de le reconstituer dans toute la masse fluide.

### 3. Champ des vitesses d'une houle cnôidale

On applique ici la technique du paragraphe 2 à la théorie de l'eau peu profonde, où l'on considère une surface libre imperméable, isobare et sans tensions superficielles. Cette théorie donne – à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$  et  $\text{dn}$  – une approximation analytique du potentiel des vitesses et de la forme de la surface induits par une onde longue [4] :

$$\varphi = \frac{A}{\lambda} Z(\lambda\theta, k), \quad \eta = \frac{a[\text{dn}^2(\lambda\theta, k) - E/K]}{1 - E/K}, \quad \theta = x - Ct + \delta \quad (4)$$

où  $\lambda$  est le nombre d'onde,  $C$  la vitesse de phase,  $\delta$  la phase à l'origine,  $A$  la vitesse horizontale maximale,  $a$  l'amplitude de l'onde,  $Z$  la fonction zêta de Jacobi de module  $k$ ,  $K(k)$  et  $E(k)$  les intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèce. Ces paramètres sont liés par les relations :

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{a}{h} \frac{1 - k^2/2 - 3E/(2K)}{1 - E/K}, \quad 4\lambda^2 h^3 = \frac{3a}{1 - E/K}, \quad A = \frac{a\sqrt{g/h}}{1 - E/K} \quad (5)$$

## Reconstruction du champ des vitesses d'une houle longue

$\lambda$  et  $K$  sont liés à la longueur  $A$  de l'onde par  $A = 2K/\lambda$ . À partir de cette solution, on obtient une meilleure estimation du potentiel des vitesses en utilisant la formule (2) :

$$\begin{aligned}\varphi &= 2^{-1} A \lambda^{-1} (Z[\lambda(\theta + iy), k] + Z[\lambda(\theta - iy), k]) \\ &= \frac{A}{\lambda} \left( Z(\lambda\theta, k) + k^2 \frac{\operatorname{sn}(\lambda\theta, k) \operatorname{cn}(\lambda\theta, k) \operatorname{dn}(\lambda\theta, k) \operatorname{sn}^2(\lambda y, k')}{\operatorname{cn}^2(\lambda y, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(\lambda\theta, k) \operatorname{sn}^2(\lambda y, k')} \right)\end{aligned}\quad (6)$$

avec  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ . Pour les faibles valeurs de  $k$ , on a :

$$\varphi = Ak^2/4 \lambda \sin(2\lambda\theta) \cosh(2\lambda y) + O(k^4) \quad (7)$$

On reconnaît en (7) l'expression de  $\varphi$  fournit par la théorie linéarisée des ondes courtes [5]. La relation (6) unifie donc les solutions de la théorie des ondes longues et de celle des ondes courtes. Cette unification n'est cependant que partielle, les relations (5) liant les paramètres n'étant valables que pour des houles relativement longues. Cette reformulation de  $\varphi$  n'étant pas constante suivant la verticale, elle nécessite une redéfinition de  $\eta$ . Si, comme dans la théorie de l'eau peu profonde au premier ordre, on considère l'approximation  $\eta = \sqrt{h/g} \varphi_x(y=h)$ , on a :

$$\eta = A \sqrt{\frac{h}{g}} \left[ \frac{\operatorname{dn}^2(\lambda\theta, k) \operatorname{cn}^2(\lambda h, k') \operatorname{dn}^2(\lambda h, k') - k^4 \operatorname{sn}^2(\lambda\theta, k) \operatorname{cn}^2(\lambda\theta, k) \operatorname{sn}^2(\lambda h, k')}{[\operatorname{cn}^2(\lambda h, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(\lambda\theta, k) \operatorname{sn}^2(\lambda h, k')]^2} - \frac{E}{K} \right] \quad (8)$$

On définit alors l'amplitude  $a$  de l'onde comme le maximum de  $\eta$ , d'où :

$$a = A \sqrt{h/g} (\operatorname{dn}^2(\lambda h, k') \operatorname{cn}^{-2}(\lambda h, k') - E/K) \quad (9)$$

### 4. Analyse des résultats

La reconstruction de  $\eta$  donne un profil – à amplitude et longueur d'onde égales – plus « dissymétrique » que la théorie de l'eau peu profonde au premier ordre : les crêtes sont plus « pincées » et les creux moins « profonds ». Ces différences sont quantitativement significatives (*figure 1*) et l'expérience tranche en faveur de la formule reconstruite (les données expérimentales sont tirées de [6]). La théorie classique (au premier ordre) surestime le champ des vitesses (*figure 2*). Cette surestimation est plus grande pour la vitesse verticale. Les écarts entre les deux formulations sont d'autant plus grands que l'onde est courte et que l'on s'éloigne de la surface (à amplitudes égales à la surface). L'écart relatif  $\varepsilon$  des vitesses horizontales maximales (i.e.  $\varepsilon = (u_c - u_r)/u_r$ , où  $u_c$  et  $u_r$  sont les vitesses horizontales en  $\theta = 0$  classiques et reconstruites) est maximal sur le fond, et est d'autant plus important que l'onde est courte. Par exemple, avec les paramètres de la *figure 2*,  $\varepsilon = 87\%$  au fond, ce qui montre que les différences entre les deux formulations sont quantitativement très significatives. L'importance de cet écart relatif montre aussi que l'approximation d'un champ des vitesses uniforme sur la verticale n'est pas satisfaisante.

### 5. Conclusion

Partant des résultats de la théorie classique de l'eau peu profonde, on a, sans gros calculs, obtenu une estimation plus réaliste du champ des vitesses d'une houle cnoidale. Les corrections ainsi apportées sont significatives et confirmées par l'expérience. La solution obtenue étant à divergence nulle, elle

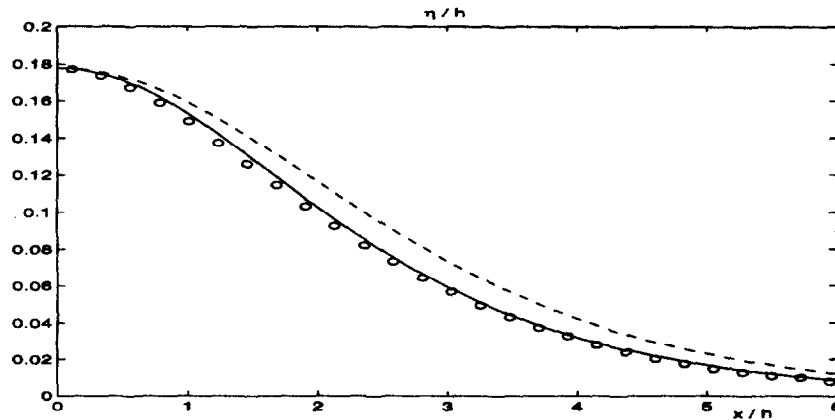


Figure 1. Profil de surface d'une onde solitaire.  $ah = 0.18$ , (- -) théorie classique, (-) théorie reconstruite, (o) expérience.

Figure 1. Soliton surface elevation  $ah = 0.18$ , (- -) classical theory, (-) reconstructed theory, (o) experiments.

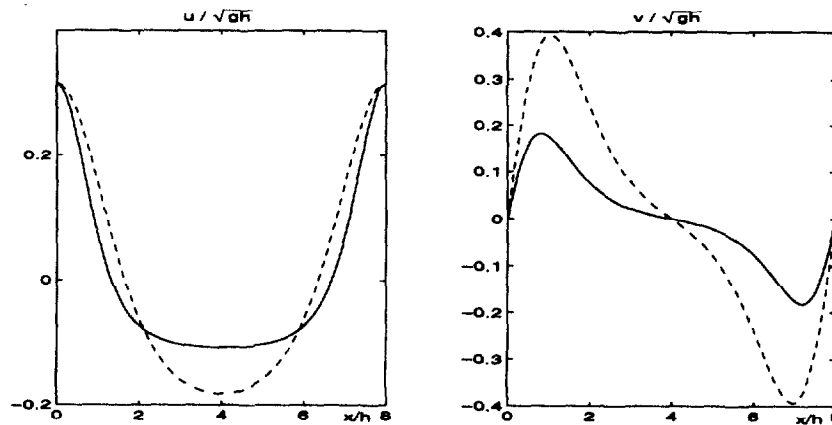


Figure 2. Vitesses à la surface.  $k^2 = 0.9$ ,  $ah = 0.32$ , (- -) théorie classique, (-) théorie reconstruite.

Figure 2. Speed at the surface  $ah = 0.32$ , (- -) classical theory, (-) reconstructed theory.

peut servir de condition initiale « acceptable » à des modèles numériques résolvant les équations exactes. Plus généralement, la technique est applicable à tous les problèmes où l'on résout une équation de Laplace par un développement en série de Taylor.

### Références bibliographiques

- [1] Reyes-Richa R., Anémométrie laser dans la houle de laboratoire, thèse, Université de Grenoble, 1977.
- [2] Germain J.P., Contribution à l'étude de la houle en eau peu profonde, thèse, Université de Grenoble, 1967.
- [3] Korteweg D., de-Vries G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves, Phil. Mag. 39 (1895) 422-443.
- [4] Mei C.C., The applied dynamics of ocean surface waves, World Scient. Pub. Co. Pte. Ltd, Singapore, 1989.
- [5] Stoker J., Water waves, Interscience Pub. Inc., New York, 1957.
- [6] Clamond D., Amplitudes et phases dans la théorie des ondes de gravité, thèse, Université de Grenoble, 1994.