

NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Finance mathématique : Feuille de réponses du TP 2
Prix d'une option dans un modèle CRR à n étapes

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignante chargée du TP.

L'objet de cet exercice est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option Call et d'une option Put de fonction de pay-off respective $\varphi(S) = (S - K)^+$ et $\varphi(S) = (K - S)^+$. Dans un premier temps nous considérons les Call et les Put à la monnaie, c'est-à-dire que l'on supposera que $K = S_0$. Rappelons que dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, les prix sont modélisés par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S_0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\text{up}, \text{down}\}$, avec $\text{up} < 1 < \text{down}$ dépendent de n . On pose à nouveau

$$n = 100 \quad T = 1 \quad \delta t = T/n \quad \text{up} = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{down} = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Et on introduit comme dans le TP1 la notation $S(i, j) = SS(i + 1, j + 1)$ ainsi que les valeurs des constantes $\sigma = 0.4$ et $S_0 = 140$.

Exercice 1. : En utilisant le programme du TP1, recalculer les valeurs de de SS pour $i \in \{0, \dots, n\}$ et $j \in \{0, \dots, i\}$. Rappeler ici les lignes de code utilisées.

Exercice 2. : Quelles valeurs trouvez-vous pour SS lorsque la volatilité σ est nulle ? Expliquez pourquoi.

Exercice 3. : On revient à une volatilité non nulle. On a vu que le prix $c(s, S_t)$ d'un portefeuille de couverture d'une option ayant pour pay-off φ peut se calculer par récurrence rétrograde : On commence par la plus grande valeur $i = n$ car $c(T, S_T) = \varphi(S_T)$ puis on procède de la façon suivante : en notant $C(i, j) := c(i\delta t, S(i, j))$, on a $C(n, j) = \varphi(S(n, j))$, puis $C(i, j) = pC(i+1, j+1) + (1-p)C(i+1, j)$, où p est la probabilité de calcul. Sous `scilab`, pour le même raisons que pour S , on posera $CC(i+1, j+1) = C(i, j)$.

Compléter le code `scilab` ci-dessous calculant les valeurs $CC(i, j)$ d'une option Call d'échéance $T = 1$ dans un modèle à $n = 100$ étapes (3 lignes incomplètes), puis, calculer les valeurs de CC .

```
function phi=phi(S);
phi=.....;
endfunction;
CC=zeros(n+1,n+1);
for jj=1 :n+1
CC=(n+1,jj)=.....;
end;
for ii=n :-1 :1
for jj=1 :ii
CC(ii,jj)=.....;
end;
end;
```

Quelle valeur trouvez vous pour la *prime* $c(0,0)$ d'un Call à la monnaie ?

Pour $n = 50$ puis pour $n = 200$ la prime serait

Reprendre les deux dernières questions pour un Put à la monnaie. Puis vérifier expérimentalement la relation de parité Call-Put.

Exercice 4. : On rappelle que cette prime peut aussi se calculer en utilisant la formule

$$c(0,0) = \mathbb{E}(\varphi(S(n, J))),$$

où $J \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ ce qui signifie que J est une variable aléatoire qui suit une loi binômiale : $\mathbb{P}(\{J = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Exécutez les commande `distrib1=binomial(0.5,1)`
`distrib2=binomial(0.5,2)` et `distrib3=binomial(0.5,3)` ; que valent
`distrib1=`

`distrib2=`

`distrib3=`

De façon générale, consultez la doc en ligne pour déterminer ce que retourne la commande `binomial(p,n)` ; expliquez :

Exercice 5. : En déduire une instruction calculant $c(0,0) = \mathbb{E}(\varphi(S(n, J))$ pour $\varphi(s) = (s - S_0)^+$.

Qu'observez-vous ?

Exercice 6. :

On veut tracer la courbe donnant la prime en fonction de la volatilité σ . Pour cela il convient de redéfinir les quantités u , d et p , puis de même SS et CC (ou PP) comme des fonctions de σ . Tracer cette courbe et la reproduire approximativement ci-dessous. Puis expliquez ce que vous observez.