NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Calcul stochastique : feuille de réponses du TP 6
Etude de la convergence du prix CRR vers le prix BS

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 140$ et $r = 0.05$.

Exercice 1. : Créer un nouveau code Scilab et y définir sucessivement les 5 quantités $\delta t = T/n$, $R = e^{r\delta t}$, $up = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, $down = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $p = (R-d)/u-d)$ comme 5 fonctions de n.

Combien trouvez-vous pour p lorsque $n = 10$, $n = 25$, $n = 100$?

- δt, R, up, down et p sont définies comme fonction de n avec la syntaxe suivante (par exemple pour δt) ou pour R :

```
function d=delta_t(n);
d=T/n;
endfunction;
```

```
function R=R(n)
R=exp(r*delta_t(n));
endfunction;
```

- On trouve $p(10) = 0,4881803$
  $p(25) = 0,4925098$
  et $p(100) = 0,4962512$

Remarque : on a vu en cours que $p(n) = \frac{1}{2} + \frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} + \sqrt{\frac{T}{n}}\,\varepsilon(\delta t)$
On a donc $\lim_{n\to\infty} p(n) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. : Expliquez ce que calcule le code Scilab suivant.

```
//La fonction S
function y=S(i,j,n);
y=S0.*(up(n)).^j.*(down(n)).^(i-j);
endfunction;
//La fonction C
function phi=phi(S);
phi=max(S-K,0);
endfunction;
function z=C(i,j,n);
z=(phi(S(n,j :(j+n-i),n))*binomial(p(n),n-i)')/R(n)^(n-i);
endfunction;
//Trace du Call en fonction de n
Nmax=250;CCall=zeros(Nmax);
for n=1 :Nmax, Call(n)=C(0,0,n); end;
plot2d(10 :Nmax,Call(10 :Nmax));
```

Explication du code :

Calcul de la fonction $S = S_0\, u^j d^{n-j}$ qui donne le prix de l'actif sous-jacent (en fonction de n car up et down dépendent de n)

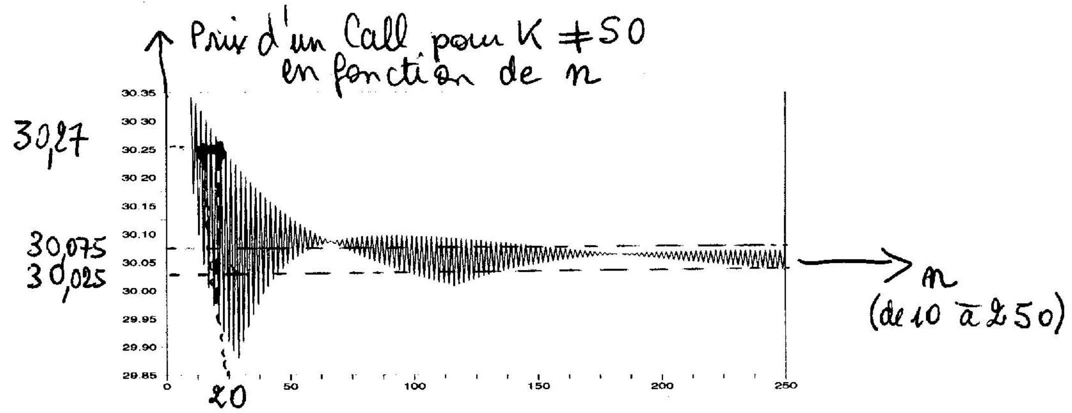
Calcul du payoff d'un Call $\varphi(S) = (S-K)^+$

Calcul du prix du Call (de payoff phi) comme espérance conditionnelle du payoff actualisée. L'espérance conditionnelle est le produit scalaire des valeurs prises phi(S(n,j:j+n-i,n)) en i=n sachant qu'on est au point (i,j), par les probabilités de prendre ces valeurs binomial(p(n),n-i). L'actualisation est la division par $(R(n))^{n-i}$.

Tracé des valeurs du Call à l'instant t=0 (prime du Call : C(0,0,n)) pour toutes les valeurs de n comprises entre n=10 et $n = N_{max} = 250$

Exercice 3. : Ajouter le code précédent à votre code. L'utiliser pour calculer le prix du Call pour $K = 130$ lorsque $n = 20$. Quelle valeur trouvez-vous?

Le code permet de calculer le prix du Call pour toute valeur de n.
Pour $n = 20$, on trouve $C(0,0,20) = 30,272811$.
Comme le dessin le montre, le prix varie avec n, par exemple, $C(0,0,50) = 30,129277$.
Les variations ~~semblent~~ semblent cependant s'estomper lorsque n croît. Elles semblent rester dans l'intervalle $[30{,}025 ; 30{,}075]$ à partir de $n = 150$.



Que savez-vous des oscillations observées sur le graphique? Pensez-vous qu'elles convergent et si oui, que savez-vous de leur limite?

Nous savons que le prix Cox-Ross-Rubinstein tend, lorsque n tend vers l'infini, vers le prix Black-Scholes selon un théorème montré en cours.
Les oscillations que l'on observe sur le graphique ont donc une limite ; on peut penser qu'elle se situe dans l'intervalle $[30{,}025 ; 30{,}075]$ (sans en être absolument sûr!) donc approximativement égale à $30{,}05$.