Université de Nice NOM : Prénom : Groupe :
LSV1-MAB

Epreuve d'examen : 13 Décembre 2007 (durée 2h00)
LSV1 : Mathématiques Appliquées à la Biologie
Matériel autorisé : une calculatrice, à l'exclusion de tout appareil suceptible d'être connecté à un réseau de communication
Document autorisé : une feuille A4 écrite de la main du candidat ou de la candidate.

Les quatre exercices peuvent être traités indépendamment et valent respectivement 7 (+3 bonus) points, 7 points, 6 points, et 3 points-bonus (barème indicatif). On soignera les explications, à donner dans l'espace laissé libre avant les boites-réponses.

Exercice 1 : On modélise l'évolution naturelle, lorsqu'il n'y a pas exploitation, de la population des baleines de l'océan atlantique par la dynamique suivante :

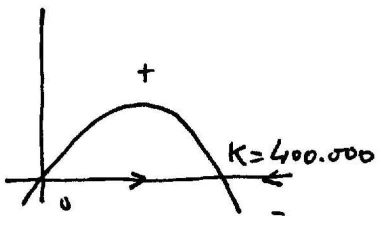
$$y' = 0,08y\left(1 - \frac{y}{400.000}\right).$$

1. De quel type de modèle s'agit-il ? Que représentent les constantes 0, 08 et 400.000 ?

Il s'agit d'un modèle logistique	0.08 représente le taux de croissance intrinsèque.
400.000 représente la capacité biotique	

2. On suppose que $y(0) > 0$; que pouvez-vous dire de $\lim_{t\to\infty} y(t)$?

On sait que l'équation logistique $y' = ay(1-\frac{y}{K})$ admet un équilibre stable en $y = K = 400.000$ vers lequel tendent toutes les solutions issues d'un point $y(0) > 0$



$\lim_{t\to\infty} y(t) = 400.000$

3. A l'issue d'une longue période de surexploitation, on estime que l'effectif de cette population de baleine est tombé à 70.000. En supposant qu'on interdit alors son exploitation, calculer, au moyen de la méthode d'Euler, une approximation de son évolution y_0, y_1, y_2, ...en prenant un pas de temps $h = 1$. On rappelle que la méthode d'Euler pour l'équation $y' = f(y)$ s'écrit :

$$\begin{cases} t_n &= t_{n-1} + h \\ y_n &= y_{n-1} + hf(y_{n-1}). \end{cases} \tag{1}$$

On a $y_n = y_{n-1} + h \cdot 0,08 y_{n-1}\left(1 - \frac{y_{n-1}}{400.000}\right)$, avec $h = 1$

$$= y_{n-1}\left(1 + 0,08\left(1 - \frac{y_{n-1}}{400.000}\right)\right)$$

En partant de $y_0 = 70.000$ on trouve avec la calculatrice successivement

$y_1 = 74.620$	$y_2 \approx 79.476,0$

4. On suppose que l'on autorise un quota de pêche, et que la dynamique est alors

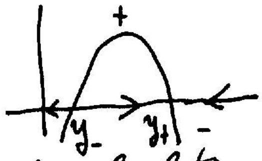
$$y' = 0,08y\left(1 - \frac{y}{400.000}\right) - 3.000.$$

Indiquer quels sont les équilibres de cette nouvelle dynamique et préciser leur stabilité. On donnera les valeurs avec un chiffre après la virgule; si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer le calcul, vous vous aiderez de la figure 1.

Les équilibres sont les solutions y de $0{,}08y(1 - \frac{y}{400\,000}) - 3000 = 0$

équation qui est de la forme $ay^2 + by + c = 0$

avec $a = \frac{-0{,}08}{400\,000}$ $b = 0{,}08$ et $c = -3000$



les formules usuelle du trinôme donne, apres calcul approché à la calculatrice.

Les équilibres sont : $y_- \approx 41.886{,}1$ et $y_+ \approx 358.113{,}9$

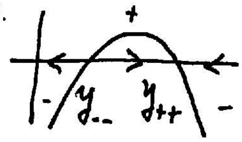
Leur stabilité : y_- est instable et y_+ est stable

5. Comment va varier la population de baleines dans ce cas sachant que $y(0) = 70.000$?

On constate que $70.000 > y_-$ et donc $y(t)$ va augmenter et tendre vers l'équilibre y_+

La population va augmenter et tendre vers y_+

6. **(bonus)** Reprendre les 3 dernières questions en supposant cette fois qu'au dela du quota légal les activités de pêche illicites portent le modèle à $y' = 0,08y(1 - \frac{y}{400.000}) - 5.000$.



Les équilibres sont : $y_{--} = 77.525{,}5$ et $y_{++} = 322.474{,}5$

Leur stabilité : y_{--} est instable et y_{++} est stable

La population va diminuer et aller à 0 car $y(0) = 70000 < y_{--}$

Exercice 2 : On observe simultanément une population de renards et une population de lapins se partageant un même territoire. On modélise leur dynamiques respectives $R(t)$ et $L(t)$ (effectifs exprimés dans des unités adhoc) par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} &= 2L - 0,1LR \\ \frac{dR}{dt} &= -30R + 0,05LR \end{cases} \tag{2}$$

1. Indiquer le sens des 4 coefficients apparaissant dans ce système

2 représente le taux de croissance intrinsèque des lapins

$-0,1$ représente le coefficient d'interaction des renards sur les lapins

-30 représente le taux de décroissance intrinsèque des renards

$+0,05$ représente le coefficient d'interaction des lapins sur les renards

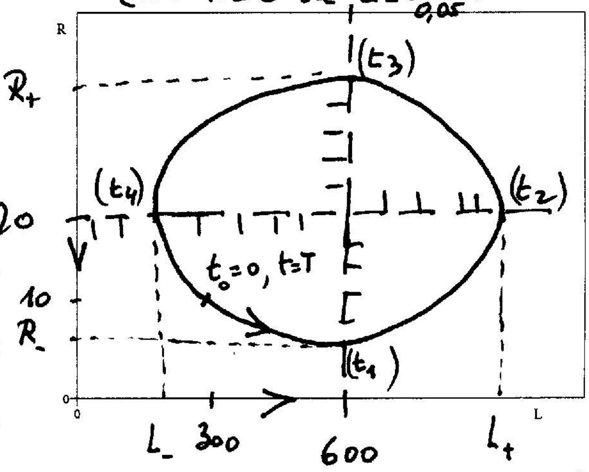
2. Calculer les équations des 2 isoclines verticales et horizontales de ce système et les tracer sur un même graphique.

isocline verticale : $2L - 0{,}1LR = 0 \Leftrightarrow L(2 - 0{,}1R) = 0$

$\Leftrightarrow L = 0$ ou $R = \frac{2}{0{,}1} = 20.$

isocline horizontale : $-30R + 0{,}05LR = 0 \Leftrightarrow R(-30 + 0{,}05L)$

$\Leftrightarrow R = 0$ ou $L = \frac{30}{0{,}05} = 600$



isoclines verticales	$L = 0$ ou $R = 20$
isoclines ~~verticales~~ horizontale	$R = 0$ ou $L = 600$

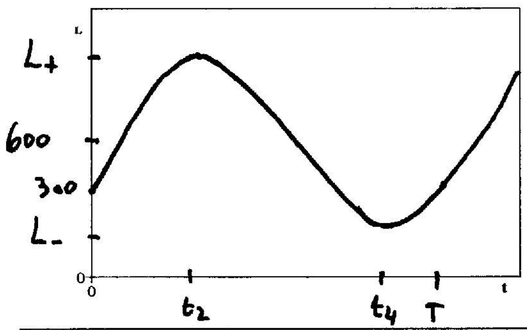
3. Quels sont les équilibres de cette dynamique ?

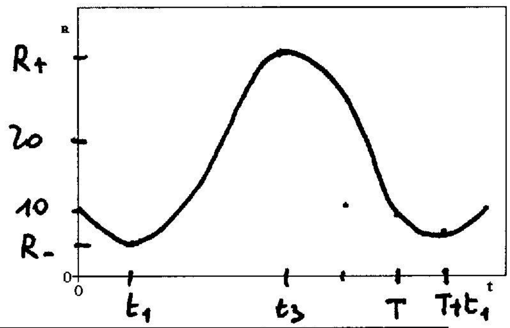
Les équilibres sont à l'intersection d'une isocline verticale et d'une isocline horizontale

On a donc ou bien $L = 0$ et $R = 0$ ou bien $R = 20$ et $L = 600$

Les équilibres sont	$(0, 0)$ et $(600, 20)$.

4. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, les populations de lapins $L(t)$ et de renards $R(t)$ valent respectivement $L(0) = 300$ et $R(0) = 10$. Quelle sera selon ce modèle la dynamique de ces deux populations à court terme ? On indiquera d'une part l'allure de la trajectoire correspondante sur le dessin de la question 2 puis l'allure des deux graphes $t \mapsto L(t)$ et $t \mapsto R(t)$ comme fonction de t.





Issue de $M_0 = (300, 10)$, à court terme la population de lapins va augmenter.

et la population de renards va diminuer